موقع حل دروسي هو موقع تعليمي يعمل على مساعدة المعلمين والطلاب وأولياء الأمور في تقديم حلول الكتب المدرسية والاختبارات وشرح الدروس والملخصات والتحاضير وتوزيع المنهج لكل المراحل الدراسية بشكل واضح ومبسط مجاناً بتصفح وعرض مباشر أونلاين على موقع حل دروسي

رياضيات 3

الفصل الدراسي الثاني

اسم الطالب/ـة :.....

الصف :.....

إعداد المعلمتان:

أ. هياء ناصر الجنوبي

أ.وفاء علوي باعقيل

م	التاريخ	الدرجة	الملاحظات	التوقيع
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				

الفصل الثالث

المتطابقات والمعادلات المثلثية

- المتطابقات المثلثية
- إثبات صحة المتطابقات المثلثية
- المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية

1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تكون المعادلة متطابقة إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها

المتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي دوال مثلثية

إذا وجدت مثالا مضادا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة حينئذ لا تكون متطابقة

المتطابقات النسبية..

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

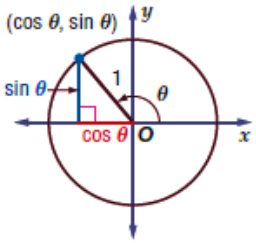
متطابقات المقلوب..

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0 \qquad csc\theta = \frac{1}{sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0 \qquad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0 \qquad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}, \tan\theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس



حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

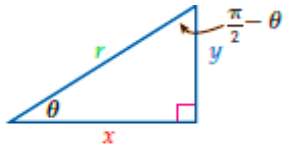
$$cot^2\theta + 1 = csc^2\theta \qquad tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

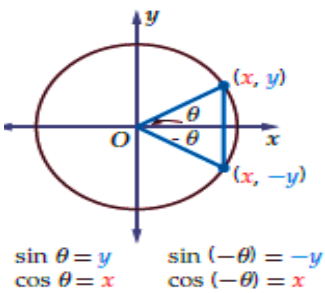
$$tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot(\frac{\pi}{2} - \theta)$

متطابقات الدوال الفردية والزوجية



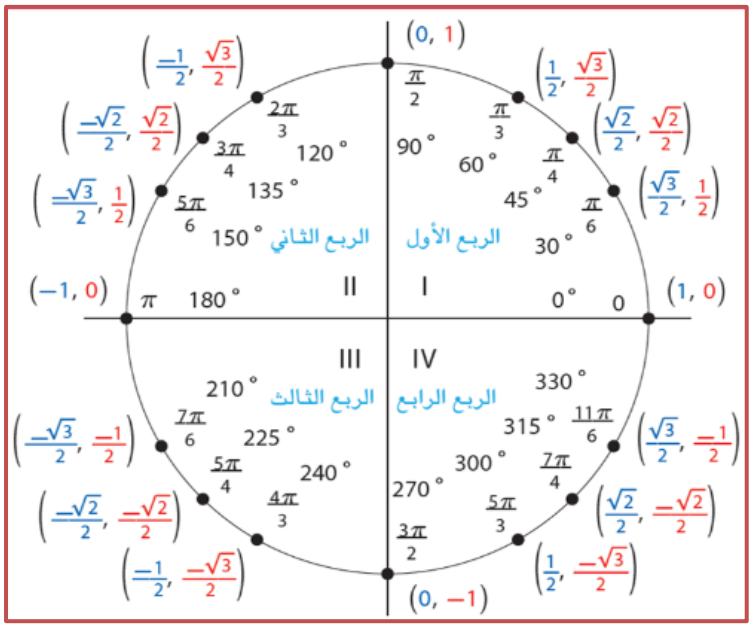
$\sin\theta = y$ $\cos\theta = x$

$\sin(-\theta) = -y$ $\cos(-\theta) = x$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

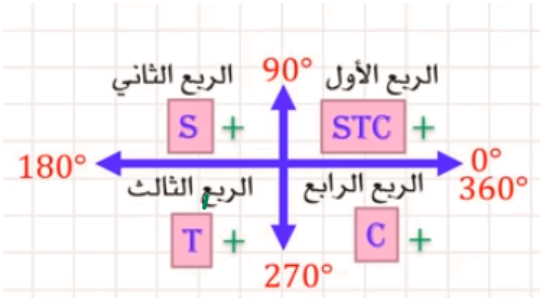
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

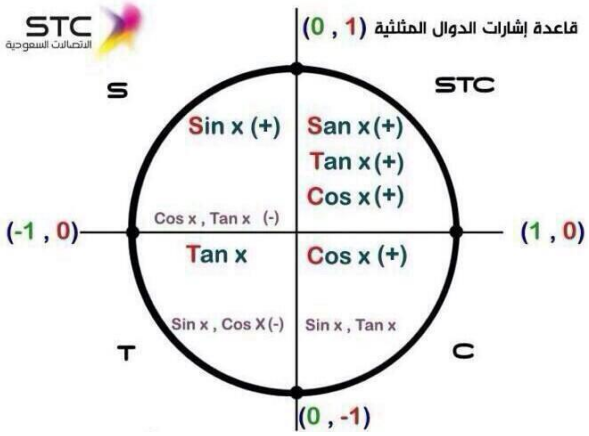
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



360	270	180	90	0	60	45	30	
								sin
								cos
								tan

الدالة	+	−
sin θ	1, 2	3, 4
csc θ		
cos θ	1, 4	2, 3
sec θ		
tan θ	1, 3	2, 4
cot θ		





1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تحقق من فهمك : صـ 11ـ

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$

إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$

إذا كان $\sin\theta = \frac{-2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$

تدرب: صـ 13ـ

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\theta$

إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$

8) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$

إذا كان $\sec\theta = \frac{-9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

2 تبسيط العبارات المثلثية

هو إيجاد **القيمة العددية** للعبارة أوكتابتها **بدلالة دالة مثلثية واحدة** فقط , إن أمكن.

إرشادات للدراسة

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$

تحقق من فهمك : صـ 12ـ

بسط كل عبارة مما يأتي:

(2A $\frac{tan^2\theta\, csc^2\theta - 1}{sec^2\theta}$

(2B $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - cos^2\theta)$

تدرب: صـ 13ـ

بسط كل عبارة مما يأتي:

(9 $\tan\theta cos^2\theta$

(17 $2 - 2\, sin^2\theta$

3 إعادة كتابة الصيغ الرياضية :

تحقق من فهمك : صـ 12ـ

3) تعلم أن مقدار العزم (T) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها , ويعطى بالمعادلة $T = Fr \sin\theta$
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F) ؟

.....

تدرب: صـ 13ـ

20) الشمس: ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يسمى قابلية الامتصاص للجسم . ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة : $e = \frac{W \sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس ، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربع ، و A المساحة السطحية المعرضة لأشعة الشمس ، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم .

a) حل المعادلة بالنسبة لـ W .

.....

.....

b) أوجد W إذا كانت $A = 0.75,\ \theta = 40°,\ e = 0.80,\ S = 1000W/m^2$. (قرب إلى أقرب جزء من مئة)

.....

.....

.....

.....

.....

مهارات التفكير العليا: صـ 14ـ

32) اكتشف الخطأ : بسط كل من علاء وسامي المقدار: $\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta+sin^2\theta}$
كما يأتي . أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برر إجابتك.

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

30) مسألة مفتوحة : اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta \sin\theta$

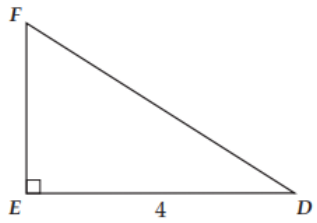
.....

.....

.....

تدرب على الاختبار: صـ 14ـ

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D = 0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5 **C** 3.2

B 4 **D** 10

40) إذا كان $\sin x = m$ وَ $0° < x < 90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\frac{1}{m^2}$

B $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\frac{1-m^2}{m}$

D $\frac{m}{1-m^2}$

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

/1 العبارة $\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\tan\theta}{\cot\theta}$ تكافئ....

Ⓐ $\tan\theta$ Ⓑ $\csc\theta$ Ⓒ $\cot\theta$ Ⓓ $\sin\theta\times\cos\theta$

/2 العبارة: $(1-\cot\theta)\sin\theta$ تكافئ.....

Ⓐ $\sin\theta\cos\theta$ Ⓑ $\sin\theta-\cos\theta$ Ⓒ $cos^2\theta$ Ⓓ $\sec\theta$

/3 العبارة $sin^2\theta\ cot^2\theta$ تكافئ.....:

Ⓐ $sin^2\theta$ Ⓑ $cos^2\theta$ Ⓒ $tan^2\theta$ Ⓓ $\frac{cos^4\theta}{cos^2\theta}$

/4 إذا كانت : $270°<\theta<360°$ و $\cos\theta=\frac{1}{2}$ فأوجد $\sin\theta$

Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ Ⓓ $\frac{-1}{2}$

/5 إذا كانت : $270°<\theta<360°$ و $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ فأوجد $\cos\theta$

Ⓐ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ Ⓒ $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ Ⓓ $\frac{8}{9}$

/6 العبارة: $\sin\theta\cdot\cot\theta$ تكافئ.....

Ⓐ $\sin\theta$ Ⓑ $sec\theta$ Ⓒ $\cos\theta$ Ⓓ $\csc\theta$

/7 ما قيمة $cos^2\theta+sin^2\theta$ ؟

Ⓐ -1 Ⓑ 0 Ⓒ 1 Ⓓ $\cos 20$

/8 إذا كان : $\cos\theta=\frac{4}{5}$ و $\sin\theta=\frac{3}{5}$ فأوجد $\tan\theta$

Ⓐ $\frac{4}{3}$ Ⓑ $\frac{3}{4}$ Ⓒ $\frac{7}{5}$ Ⓓ $\frac{1}{5}$

/9 ما قيمة $[cos^2(cot75)]+[sin^2(cot75)]$ ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 45 Ⓒ 60 Ⓓ 75

تحصيلي رياضيات

/10 مالعبارة المكافئة لـ $\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta}$ ؟

Ⓐ $\tan\theta$ Ⓑ $\csc\theta$ Ⓒ $\sec\theta$ Ⓓ $\tan^2\theta$

/11 العبارة $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$ تكافئ.....

Ⓐ $\tan\theta$ Ⓑ $\cot\theta$ Ⓒ 1 Ⓓ $\sec\theta$

/12 العبارة $(\frac{\cos\theta}{\csc\theta})\tan\theta$ تكافئ.....

Ⓐ $\sin^2\theta$ Ⓑ $\csc^2\theta$ Ⓒ $\sin\theta$ Ⓓ $\cos\theta$

/13 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$

Ⓐ $\sin^2\theta$ Ⓑ $\cos^2\theta$ Ⓒ $\sin\theta$ Ⓓ $\cos\theta$

/14 إذا كانت : x تمثل زاوية حادة و $\cos 50 = \sin x$ فأوجدقيمة x

Ⓐ 40° Ⓑ 30° Ⓒ 60° Ⓓ 130°

/15 ما أبسط قيمة للمقدار: $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

Ⓐ $\sin^2\theta$ Ⓑ $\cos^2\theta$ Ⓒ $\sin\theta$ Ⓓ $\cos\theta$

/16 أوجد قيمة : $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 0 Ⓒ 0.5 Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1 إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

باستعمال المتطابقات المثلثية الأساسية هناك طريقتان للإثبات

تحويل أحد طرفي المعادلة

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدا

تحويل طرفي المعادلة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تحول كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة.

تحقق من فهمك : صـ 15ـ

1) أثبت صحة المتطابقة، $cot^2\theta - cos^2\theta = cot^2\theta\ cos^2\theta$

تدرب: صـ 17ـ

أثبت صحة المتطابقات الآتية/

1) $cos^2\theta + tan^2\theta\ cos^2\theta = 1$

7) $tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

تحقق من فهمك : صـ 16ــ

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة ، $tan^2\theta(cot^2\theta - cos^2\theta)$

$cot^2\theta$ (A $cos^2\theta$ (C

$tan^2\theta$ (B $sin^2\theta$ (D

تدرب: صـ 17ــ

11) أي مما يأتي يكافئ العبارة ، $\frac{tan^2\theta+1}{tan^2\theta}$

$sin^2\theta$ (A $cos^2\theta$ (C

$tan^2\theta$ (B $csc^2\theta$ (D

من الاقتراحات:

- ✓ بسط العبارة بالاستفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية
- ✓ حلل أو اضرب كلا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها
- ✓ اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع
- ✓ لا تنفذ أي عملية (جمع , طرح, ضرب , قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة , لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات

3 إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل كلا طرفيها

تحقق من فهمك : صـ 17ـ

3) أثبت صحة المتطابقة، $csc^2\theta - cot^2\theta = cot\theta\ tan\theta$

تدرب: صـ 18ـ أثبت صحة المتطابقات الآتية

14) $sec\theta csc\theta = tan\theta + cot\theta$

18) $\csc\theta - 1 = \frac{cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

بسط كلا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج (1) أو(-1)

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

32) $\cos(-\theta)\ sec\theta$

مهارات التفكير العليا: صـ 19ــ

44) **اكتشف المختلف :** حدد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى . وضح إجابتك :

$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$

$sin^2\theta - cos^2\theta = 2sin^2\theta$

$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$

تدرب على الاختبار: صـ 19ــ

55) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ : $\cos\theta$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

A $\frac{\cos\theta}{cos^2\theta + sin^2\theta}$

B $\frac{1 - sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta \sin\theta$

D $\tan\theta \csc\theta$

56) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثل متطابقة: $sin^3\theta \cos\theta + cos^3\theta \sin\theta = \sin\theta \cos\theta$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 العبارة : $csc^2\theta - cot^2\theta$ تكافئ:.....

Ⓐ -1 Ⓑ 1 Ⓒ $\tan\theta$ Ⓓ $\cot\theta$

/2 العبارة : $(1 - sin^2\theta)cos^2\theta$ تكافئ.....

Ⓐ $sin^4\theta$ Ⓑ $cos^4\theta$ Ⓒ $tan^2\theta$ Ⓓ $cot^2\theta$

/3 العبارة $(1 - cot^2\theta)\ sin^2\theta$:تكافئ.....

Ⓐ $sin^2\theta - cos^2\theta$ Ⓑ $cos^2\theta\, sin^2\theta$ Ⓒ $tan^2\theta$ Ⓓ $\sec\theta$

/4 العبارة : $cot^2\theta(tan^2\theta - sin^2\theta)$ تكافئ.....

Ⓐ $sin^2\theta$ Ⓑ $cos^2\theta$ Ⓒ $\cos\theta$ Ⓓ $-sin^2\theta$

/5 العبارة : $cot^2\theta(tan^2\theta + sin^2\theta)$ تكافئ.....

Ⓐ $1 + sin^2\theta$ Ⓑ $1 + cos^2\theta$ Ⓒ $cos^2\theta$ Ⓓ $sin^2\theta$

/6 قيمة المحددة $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$ تساوي.....

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ $\cos 2x$ Ⓓ $2sin^2x$

/7 العبارة : $\frac{sin\theta}{cot\theta \cdot sec\theta}$ تكافئ.....

Ⓐ $sin^2\theta$ Ⓑ $cos^2\theta$ Ⓒ $\cot\theta$ Ⓓ $\tan\theta$

/8 $24(csc^2\theta - cot^2\theta)$

Ⓐ $\cos\theta$ Ⓑ $\sin\theta$ Ⓒ 24 Ⓓ 12

/9 $\sqrt{1 - sin^2\theta} =$

Ⓐ $|\cos\theta|$ Ⓑ $\sin\theta$ Ⓒ 3 Ⓓ $|\cos\theta + sin\theta|$

/10 العبارة : $sec\theta\ csc\theta(1 - sin^2\theta)$ تكافئ المتطابقة.....

Ⓐ $\cos\theta$ Ⓑ $\sin\theta$ Ⓒ $\tan\theta$ Ⓓ $\cot\theta$

تحصيلي رياضيات

/11 $\cos(-\theta)\frac{\tan\theta}{\sec\theta}$ تكافئ:.....

Ⓐ $\sin\theta\cos\theta$ Ⓑ $\sin\theta$ Ⓒ $\sec\theta$ Ⓓ $\cot\theta$

/12 ما الدالة الزوجية من الدوال التالية؟

Ⓐ $f(x)=\cos x$ Ⓑ $f(x)=\sin x$ Ⓒ $f(x)=\tan x$ Ⓓ $f(x)=\csc x$

/13 العبارة $(\sin\theta+\cos\theta)^2$:

Ⓐ $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ Ⓑ $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ Ⓒ $1+2\sin\theta\cos\theta$ Ⓓ $3\sin\theta\cos\theta$

1 إيجاد القيم المثلثية

متطابقات المجموع

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

متطابقات الفرق

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

تحقق من فهمك : صـ 20ـ

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1A) $\sin 15°$

1B) $\cos(-15°)$

تدرب: صـ 22ـ

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

1) $\cos 165°$

8) $tan195°$

2 استعمال متطابقات المجموع والفرق

تحقق من فهمك : صـ 21ـ

إذا كانت شدة التيار c تعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ فأجب عما يأتي :

2A) أعد كتابة الصيغة ، باستعمال الفرق بين زاويتين

2B)استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ، لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

تدرب: صـ 22ـ

9) يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية ،وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2 \sin 120°t$

a) أعد كتابة الصيغة ، باستعمال المجموع بين زاويتين

b)استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ، لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحقق من فهمك : صـ 22ـ

تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضا في إثبات صحة المتطابقات.

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

تدرب: صـ 22ـ

13) $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

23) $\frac{sinA+tan\theta cosA}{cosA-tan\theta sinA} = \tan(A+\theta)$ حيث A,θ . زاويتان حادتان

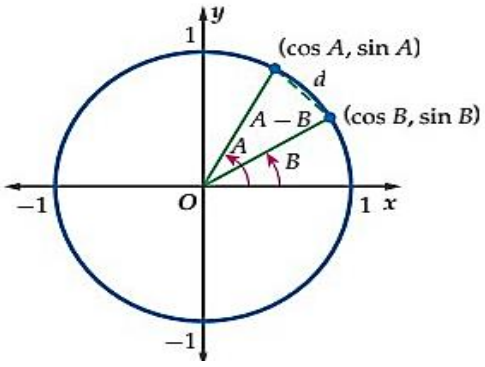
مهارات التفكير العليا: صـ 23ـ

29) **تبرير** : بسط العبارة الآتية ، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

31) برهان : الشكل أدناه ، يبين الزاويتين A ,B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة . استعمل قانون المسافة ، لإيجاد قيمة d ، حيث:

$$(x_1\ , y_1) = (\cos\ B, \sin B), \qquad (x_2, y_2) = (\cos\ A, \sin A)$$



تدرب على الاختبار: صـ 23ــ

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة: $\sin(60^\circ + \theta)\cos\theta\ - \cos(60^\circ + \theta)sin\theta$

A $\frac{1}{2}$ C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\sqrt{3}$

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$

حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 قيمة $\sin(30° - \theta)\ \sin(\theta) = \cos(30° - \theta)\cos(\theta)$ تساوي ....

Ⓐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓑ $-\frac{1}{2}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

/2 العبارة: $\boldsymbol{cos^4\theta - sin^4\theta}$ تكافئ.....

Ⓐ $\cos 4\theta$ Ⓑ $\sin 4\theta$ Ⓒ $\cos 2\theta$ Ⓓ $\sin 2\theta$

/3 القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ هي :

Ⓐ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ Ⓒ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ Ⓓ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

/4 القيمة الدقيقة لـ $\cos 45° \cos 15° + \sin 45° \sin 15°$ هي :

Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\mathbf{1}$

/5 قيمة العبارة :. $\sin 15° \cos 45° + \cos 15° \sin 45°$ هي :

Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓑ $\frac{1}{2}$ Ⓒ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ Ⓓ $\frac{-1}{2}$

/6 ما القيمة الدقيقة للعبارة: $\sin(60° +\theta)\ \cos\theta - \cos(60° + \theta)\ \sin 60°$

Ⓐ $\sqrt{3}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

/7 إذا كان : $\sin\frac{4}{5}$ فإن $\tan(90° - \theta) =$

Ⓐ $\frac{4}{3}$ Ⓑ $\frac{1}{2}$ Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ Ⓓ $\frac{3}{4}$

/8 إذا كان : $\tan\frac{7}{8}$ فإن $\tan(90° - \theta) =$

Ⓐ $\frac{7}{8}$ Ⓑ $\frac{4}{3}$ Ⓒ $\frac{8}{7}$ Ⓓ $\frac{3}{5}$

/9 إذا كان : $\sin\theta = 0.21$ فإن $\sin(\pi - \theta) =$

Ⓐ 0.21 Ⓑ -0.21 Ⓒ 0 Ⓓ 0.79

1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

متطابقات ضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم θ

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

تحقق من فهمك : صـ 25ـ

1) أوجد الفيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان: $90° < \theta < 180°, \cos\theta = \frac{-1}{3}$

تحقق من فهمك : صـ 26ـ

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يلي إذا كان : $90° < \theta < 180°, \cos\theta = \frac{-1}{3}$

2A) $\cos 2\theta$

2B) $\tan 2\theta$

تدرب: صـ 29ـ

دون استعمال الآلة الحاسبة ،أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\sin 2\theta, \cos 2\theta$

1) $\sin\theta = \frac{1}{4}, 0° < \theta < 90°$

3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم θ

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

تحقق من فهمك : صـ 27ـ

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$, θ في الربع الثاني

تدرب: صـ 29ـ

دون استعمال الآلة الحاسبة ،أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$

3) $\cos\theta = \frac{3}{5}, 270° < \theta < 360°$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تحقق من فهمك : صـ 28ـ

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبا بالصيغة:

$g = 978 + 5.17sin^2L - 0.014 \sin L \cos L$ حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسط هذه العلاقة مستعملا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

.....

.....

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A , واحسب قيمة g عندما $L=45°$

.....

.....

تدرب: صـ 29 ـ

19)يمر تيار متردد في دائرة كهربائية، إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$, فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تعطى بالصيغة : $P = I^2{}_0 R sin^2 t\theta$ عبر عن القدرة بدلالة $\cos 2\theta$

.....

.....

.....

.....

.....

يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
في إثبات صحة المتطابقات أيضا.

5 إثبات صحة المتطابقة

تحقق من فهمك : صـ 28ـــ

5) أثبت صحة المتطابقة $4cos^2x - sin^2 2x = 4cos^4 x$

تدرب: صـ 29ـــ

15) أثبت صحة المتطابقة $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

مهارات التفكير العليا: صـ 30ـــ

27) **اكتشف الخطأ :** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ: $sin15^\circ$ هل إجابة أي منهما صحيحة؟ برر إجابتك.

سعيد

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\sin(45-30) = \sin 45\cos 30 - \cos 45\sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\sin\frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$
$$= 0.5$$

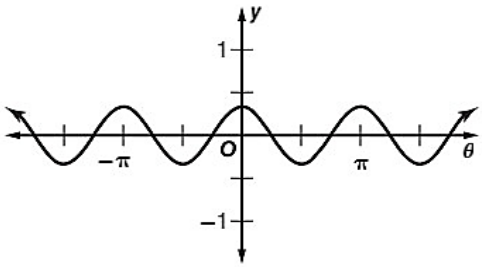
تدرب على الاختبار: صـ30ـ

43) أوجدالقيمة الدقيقة لـ: $tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 < \theta < 90^\circ$

A) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{3}-2$

C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثلة بيانيا في الشكل أدناه هي:



A) $y = 3\cos 2\theta$ B) $y = \frac{1}{3}cos2\theta$

C) $y = 3\cos\frac{1}{2}\theta$ D) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\theta$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 إذا علمت أن : $0° \leq \theta \leq 90°$ و $\tan\theta = 0$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ تساوي ...

Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓓ 2

/2 إذا علمنا أن : $0° < \theta < 90°$ و $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة $\cos\frac{\theta}{2}$ تساوي ...

Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓒ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ Ⓓ $\frac{3}{4}$

/3 إذا علمت أن : $270° \leq \theta \leq 360°$ و $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فإن قيمة $\cos 2\theta$ تساوي ...

Ⓐ $-\frac{24}{7}$ Ⓑ $-\frac{7}{25}$ Ⓒ $\frac{7}{25}$ Ⓓ $-\frac{24}{25}$

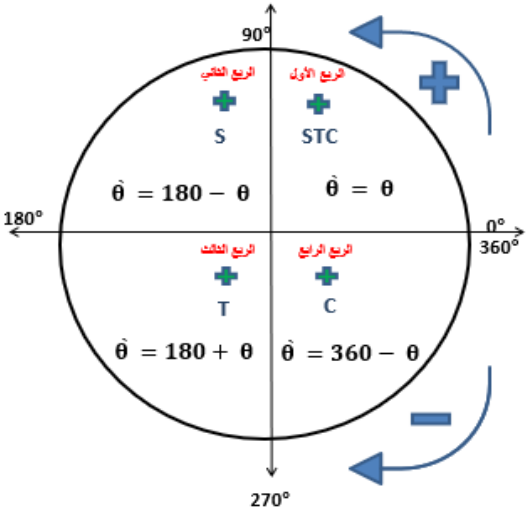
/4 إذا علمت أن : $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ و $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فإن قيمة $\sin 2\theta$ تساوي ...

Ⓐ $-\frac{24}{7}$ Ⓑ $-\frac{7}{25}$ Ⓒ $\frac{7}{25}$ Ⓓ $-\frac{24}{25}$

/5 إذا علمنا أن : $0° < \theta < 90°$ و $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة $\sin\frac{\theta}{2}$ تساوي ...

Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ⓒ $\frac{1}{2}$ Ⓓ $\frac{1}{4}$

1 حل المعادلات على فترة معطاه



الحصول على قيم محددة للمتغير تكون عندها المعادلة صحيحة

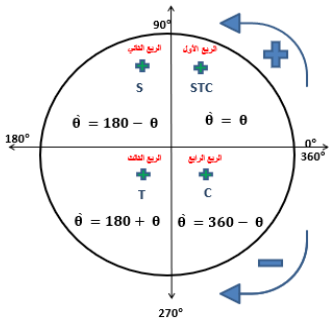
تحقق من فهمك : صـ 33ـ

1A) حل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$،
إذا كانت: $0 \le x \le 2\pi$

1B) حل المعادلة
$4sin^2\theta + 4cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$،
إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

تدرب: صـ 168ـ

1) حل المعادلة $cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$، إذا كانت $0° \leq \theta \leq 360°$



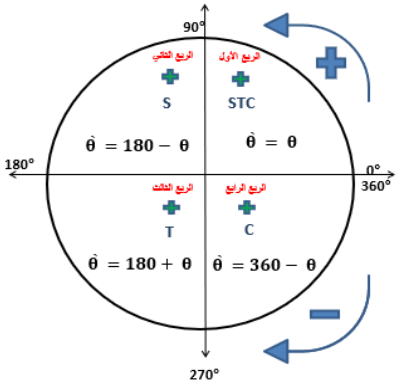
2 معادلات مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات : العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافا لها مضاعفات 2π ،
ولذلك ليس من الضروري سرد جميع الحلول

تحقق من فهمك : صـ 33ـ

2A) حل المعادلة : $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حل المعادلة : $2\sin\theta = -1$ ، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان



تدرب: صـ 36ـــ

2) حل المعادلة $cos^2\theta + \cos\theta = 1$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 360°$

3 حل معادلات مثلثية

تحقق من فهمك : صـ 34ـ

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة , ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

تدرب: صـ 36ـ

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو $\mathbf{d}$ ، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $\mathbf{d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12}$ حيث $\mathbf{d}$ عدد الأيام بعد 21 مارس ، فأجب عما يأتي :

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $\mathbf{10\frac{1}{2}}\ h$ تماما ؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a ، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $\mathbf{10\frac{1}{2}}$ ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبا يوم 22 يونيو ؟ فسر إجابتك.

4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيله

تحقق من فهمك : صـ 34ـ

4) حل المعادلة $cos^2\theta + 3 = 4 - sin^2\theta$

تدرب: صـ 36ـ

15) حل المعادلة : $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ،لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات

5 حل معادلات مثلثية باستخدام المتطابقات

تحقق من فهمك : صـ 35ـ

5A) حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات $\sin\theta\cot\theta - cos^2\theta = 0$

5B) حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

تدرب: صـ 36ـــ

14) حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات: $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$

مهارات التفكير العليا: صـ 37ـــ

31) اكتشف الخطأ : حلت كل من هلا وليلى المعادلة :

$0^\circ \le \theta \le 360^0 , 2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$

أي منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك.

هلا

$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$

$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$2\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ , 300^\circ$

ليلى

$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = 90^\circ , 270^\circ$

تدرب على الاختبار: صـ 162ـ

47) أي مما يأتي ليس حلا للمعادلة : $sin\theta + \cos\theta tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ C 2π

B $\frac{7\pi}{4}$ D $\frac{3\pi}{4}$

48) ما حل المعادلة : $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ حيث $0^\circ \le x \le 360^0$ ؟

A 150^0 أو 30^0 C 330^0 أو 210^0

B 120^0 أو 60^0 D 300^0 أو 240^0

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 حل المعادلة : $\sin\theta = \frac{1}{2}, 0° \le \theta \le 360°$ هو ...

Ⓐ $60°$ Ⓑ $120°$ أو $45°$ Ⓒ $120°$ أو $60°$ Ⓓ $150°$ أو $30°$

/2 حل المعادلة : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0° \le \theta \le 360°$ هو ...

Ⓐ $30°$ Ⓑ $210°$ أو $30°$ Ⓒ $210°$ أو $150°$ Ⓓ لا يوجد لها حل

/3 حل المعادلة : $3\cos^2\theta - 4\cos\theta = 0, 0° \le \theta \le 180°$ هو ...

Ⓐ $30°$ Ⓑ $90°$ Ⓒ $330°$ أو $30°$ Ⓓ لا يوجد لها حل

/4 أي التالي ليس حلا للمعادلة : $\sin\theta + \cos\theta \tan^2\theta = 0$ ؟

Ⓐ $\frac{5\pi}{2}$ Ⓑ $\frac{7\pi}{4}$ Ⓒ 2π Ⓓ $\frac{3\pi}{4}$

/5 حل المعادلة : $\tan\theta = -1, 0 \le \theta \le 2\pi$ هو ...

Ⓐ $\frac{7\pi}{4}$ Ⓑ $\frac{3\pi}{2}$ Ⓒ $\frac{5\pi}{4}$ Ⓓ $\frac{\pi}{4}$

/6 إذا كان $\sec\theta + 2 = 0$ حيث $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ فإن : $\theta = \cdots$

Ⓐ $60°$ Ⓑ $90°$ Ⓒ $120°$ Ⓓ $240°$

/7 حل المعادلة : $\tan\theta - \sec\theta = 0$ هو:

Ⓐ لا يوجد حل Ⓑ $\frac{\pi}{3}$ Ⓒ $\frac{\pi}{2}$ Ⓓ $\frac{\pi}{4}$

الفصل الرابع

القطوع المخروطية

- القطوع المكافئة
- تحديد أنواع القطوع المخروطية
- القطوع الزائدة
- القطوع الناقصة والدوائر

القطوع المخروطية

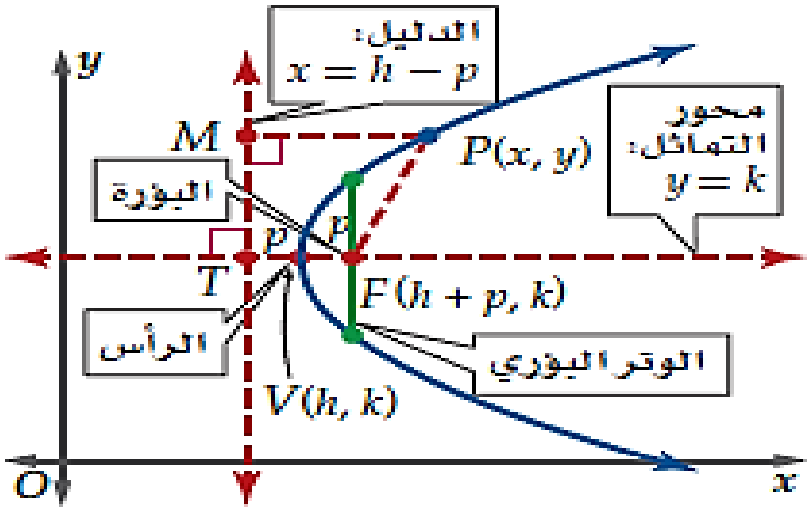
هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A,B,C أعداد ليست جميعها أصفارا

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيا



القطع المكافئ
مجموعة النقاط المستوية التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة مساويا لبعدها عن مستقيم

النقطة الثابتة تسمى (البؤرة) والمستقيم يسمى (الدليل)

محور التماثل
خط مستقيم عمودي على الدليل ويمر بالبؤرة

الرأس
نقطة تقاطع القطع مع محور التماثل

الوتر البؤري
قطعة مستقيمة مارة بالبؤرة وعمودية على محور التماثل وطرفاها تقع على القطع

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

القطع المكافئ المفتوح رأسيا

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

القطع المكافئ المفتوح أفقيا

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

خصائص القطع المكافئ:

الاتجاه / المنحنى مفتوح رأسيا

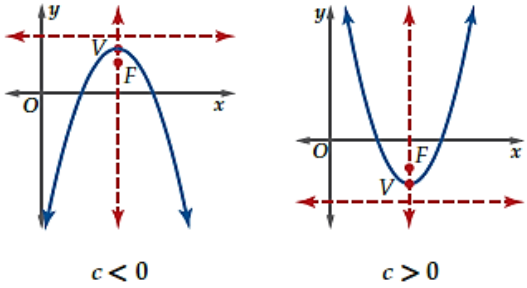
الرأس / (h , k)

البؤرة / (h , k +c)

معادلة محور التماثل / x = h

معادلة الدليل / y = k – c

طول الوتر البؤري / |4c|



c < 0 c > 0

الاتجاه / المنحنى مفتوح أفقيا

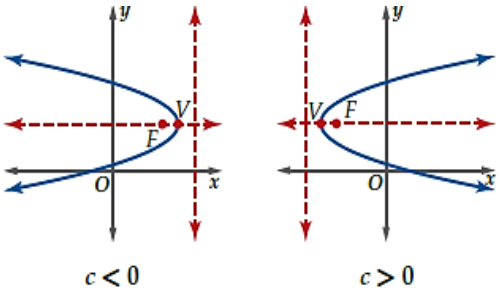
الرأس / (h , k)

البؤرة / (h + c , k)

معادلة محور التماثل / y = k

معادلة الدليل / x = h – c

طول الوتر البؤري / |4c|



c < 0 c > 0

اتجاه القطع المكافئ :

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله موازٍ لأحد محوري الاحداثيات :

- ✓ مفتوحا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x , وكانت $c > 0$.
- ✓ مفتوحا إلى أسفل إذا كان الحد التربيعي هو x , وكانت $c < 0$.
- ✓ مفتوحا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y , وكانت $c > 0$.
- ✓ مفتوحا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو y , وكانت $c < 0$.

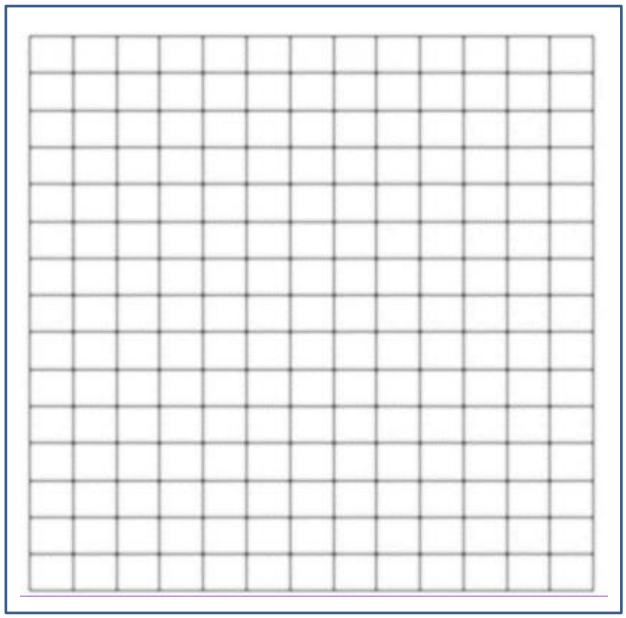
1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيا:

تحقق من فهمك : صـ 48ـ

1A) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانيا: $8(y+3)=(x-4)^2$

$h=$ $k=$ $c=$

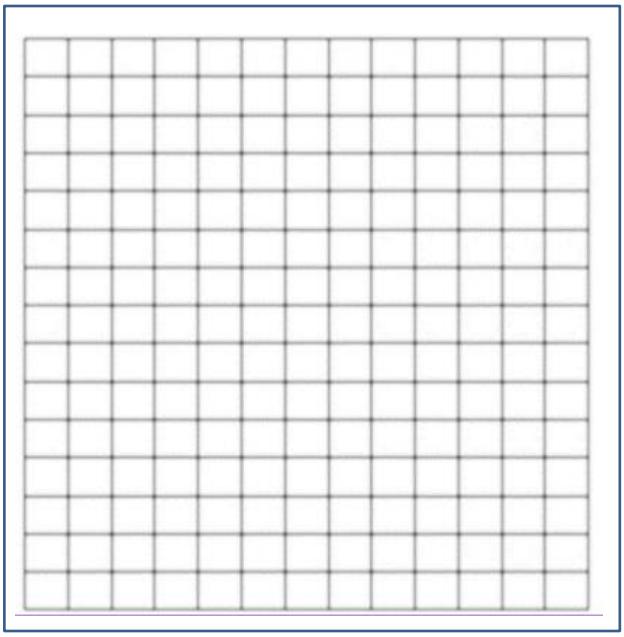
الخصائص	
الإتجاه	
الرأس	
البؤرة	
معادلة الدليل	
معادلة محور التماثل	
طول الوتر البؤري	



1B) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانيا: $2(x+6)=(y+1)^2$

$h=$ $k=$ $c=$

الخصائص	
الإتجاه	
الرأس	
البؤرة	
معادلة الدليل	
معادلة محور التماثل	
طول الوتر البؤري	

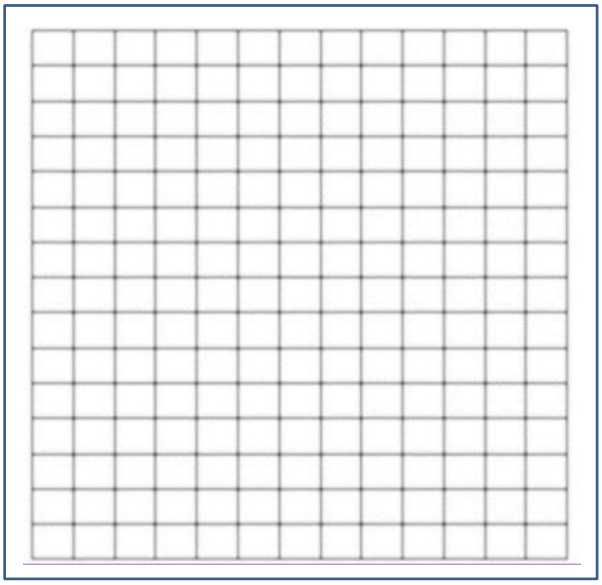


تدرب: صـ 52 ـ

1) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانيا: $(x-3)^2 = 12(y-7)$

$h =$ $k =$ $c =$

الخصائص	
الإتجاه	
الرأس	
البؤرة	
معادلة الدليل	
معادلة محور التماثل	
طول الوتر البؤري	



2 خصائص القطع المكافئ :

لتحديد خصائص القطع المكافئ نعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها،
وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع

تحقق من فهمك : صـ 48ـ

2) عد إلى فقرة لماذا؟ في بداية الدرس . افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة
$x^2 = 44.8(y-6)$, حيث $-5 \le x \le 5$
إذا كانت x , y بالأقدام , فإين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

تدرب: صـ 52 ـ

7) صمم بدر لوح تزلج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$
حيث x , y بالأقدام , احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟

3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

تحقق من فهمك : صـ 49ـ

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ
ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانيا

(3A $x^2 - 4y + 3 = 7$

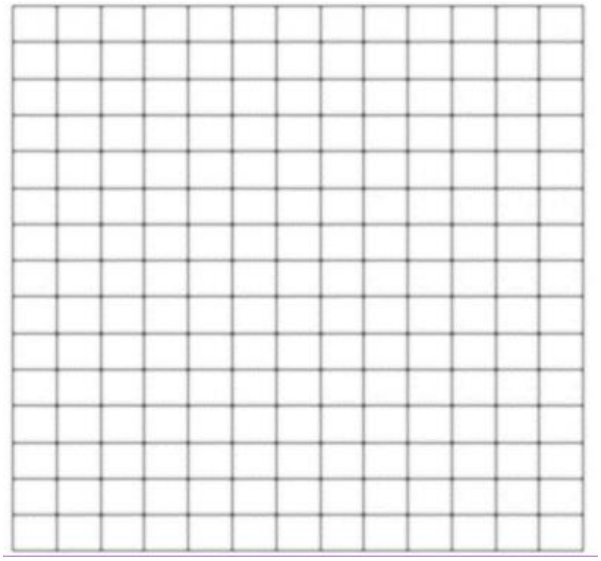
$h =$ $k =$ $c =$

الخصائص	
الإتجاه	
الرأس	
البؤرة	
معادلة الدليل	
معادلة محور التماثل	
طول الوتر البؤري	

(3B $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

$h =$ $k =$ $c =$

الخصائص	
الإتجاه	
الرأس	
البؤرة	
معادلة الدليل	
معادلة محور التماثل	
طول الوتر البؤري	

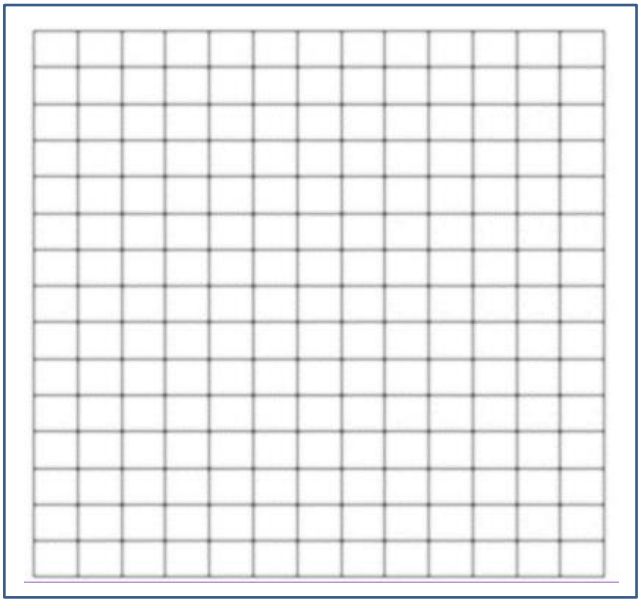


تدرب: صـ 52 ـ

(11 $3x^2 + 72 = -72y$

$h =$ $k =$ $c =$

الخصائص	
الإتجاه	
الرأس	
البؤرة	
معادلة الدليل	
معادلة محور التماثل	
طول الوتر البؤري	



4 كتابة معادلات القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصهة:

الدليل:

يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

الاتجاه:

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحا إلى أعلى أو إلى أسفل .
أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحا إلى اليمين أو إلى اليسار.

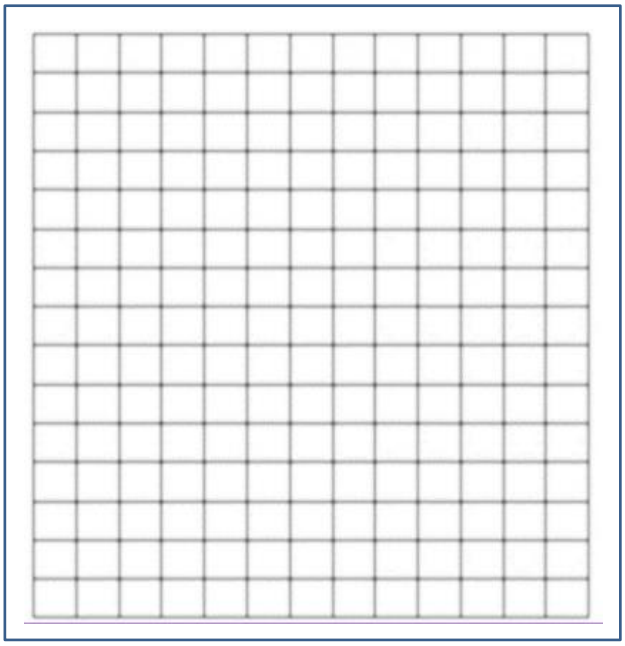
تحقق من فهمك : صـ 50ـــ

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

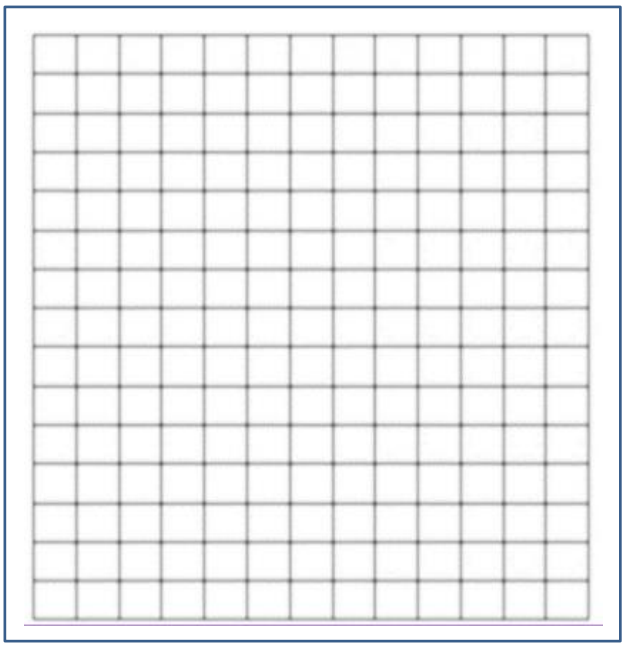
4A) البؤرة (-6,2) والرأس (-6,-1)

4B) الرأس (-2, 9) والدليل X=12

4C. البؤرة (-4 , -3) والمنحنى مفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة (-10, 5)

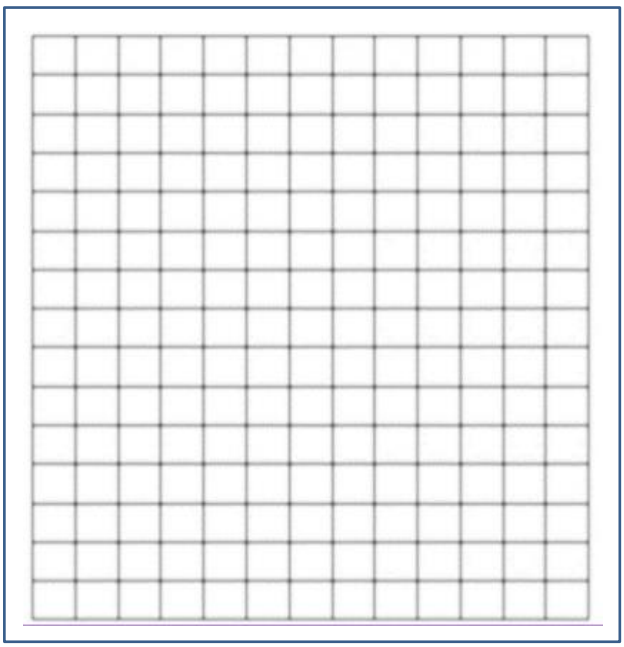


4D. البؤرة (5 , -1) والمنحنى مفتوح إلى اليمين ويمر بالنقطة (-7, 8)



تدرب: صـ 52 ــ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة ثم مثل منحناه بيانيا

16) البؤرة (3 , 3) والمنحنى مفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة (18 , 23)



5 مماس منحنى القطع المكافئ

معادلة المماس إذا كان القطع رأسيا

$$y - y_1 = \frac{(x_1 - h)}{2c}(x - x_1)$$

معادلة المماس إذا كان القطع أفقيا

$$y - y_1 = \frac{2c}{(y_1 - k)}(x - x_1)$$

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس:

- إذا كان المنحنى مفتوحا أفقيا فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحنى مفتوحا رأسيا فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

تحقق من فهمك: صـ 51ــ اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة

5A) $y = 4x^2 + 4, (-1, 8)$

(5B $(1, -4)$, $x = 5 - \frac{y^2}{4}$

تدرب: صـ 52ـ

(24 $(-5, 5)$, $(x+7)^2 = \frac{-1}{2}(y-3)$

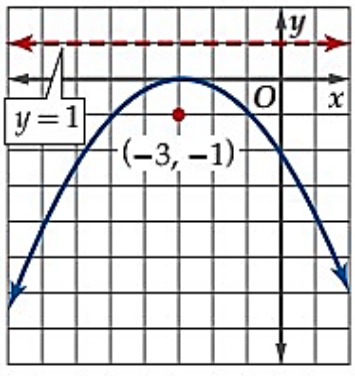
مهارات التفكير العليا: صـ 53ـ

36) اكتشف الخطأ : مثلت صفية وميمونة المنحنى :

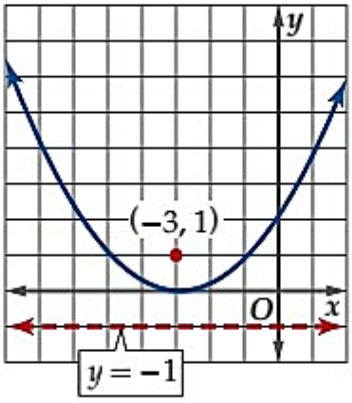
$x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

بيانيا كما هو موضح أدناه . فأي التمثيلين صحيح ؟ فسر تبريرك ..

صفية



ميمونة



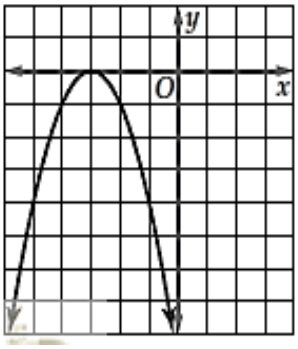
تدرب على الاختبار: صـ53ــ

49) إذا كان x عددا موجبا فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي :

A $x^{\frac{-1}{4}}$ C $x^{\frac{3}{4}}$

B $\sqrt{x^3}$ D $\sqrt{x^5}$

50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضح منحناها جانبا؟



A $y = x$

B $y = |x|$

C $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 ما اتجاه القطع المكافئ: $(x-5) 8 = y^2$؟

Ⓐ يمين Ⓑ يسار Ⓒ أسفل Ⓓ أعلى

/2 ما إحداثيات بؤرة القطع المكافئ: $y^2 = 4x$ ؟

Ⓐ $(0,1)$ Ⓑ $(1,0)$ Ⓒ $(0,4)$ Ⓓ $(4,0)$

/3 ما معادلة القطع المكافئ: الذي بؤرته $(2, 5)$، ودليله $x = -3$ ؟

Ⓐ $(x+\frac{1}{2})^2 = -10(y-5)$ Ⓑ $(x+\frac{1}{2})^2 = 10(y-5)$ Ⓒ $(y-5)^2 = -10(x-\frac{1}{2})$ Ⓓ $(y-5)^2 = 10(x-\frac{1}{2})$

/4 ما اتجاه القطع المكافئ $(y - 2) 3 = x^2$ ؟

Ⓐ يمين Ⓑ يسار Ⓒ أسفل Ⓓ أعلى

/5 ما اتجاه القطع المكافئ الذي بؤرته (5,3)، ودليله $y= 1$ ؟

Ⓐ يمين Ⓑ يسار Ⓒ أسفل Ⓓ أعلى

/6 ما اتجاه القطع المكافئ الذي رأسه (1,2)، ودليله $y= 5$ ؟

Ⓐ يمين Ⓑ يسار Ⓒ أسفل Ⓓ أعلى

/7 ما إحداثيات رأس القطع المكافئ: $(y + 2) 8 =(x - 2)^2$ ؟

Ⓐ (-2, -2) Ⓑ (-2 , 2) Ⓒ (2, -2) Ⓓ (2, 2)

/8 ما معادلة محور تماثل القطع المكافئ : $x^2 - 2x + y = 16$ ؟

Ⓐ $x = -17$ Ⓑ $x = -1$ Ⓒ $x = 1$ Ⓓ $x = 17$

/9 طول الوتر البؤري للقطع المكافئ: $(y - 5)^2 = 8 (x - 3)$؟

Ⓐ 3 وحدات Ⓑ 5 وحدات Ⓒ 8 وحدات Ⓓ 10 وحدات

تحصيلي رياضيات

/10 معادلة محور تماثل القطع المكافئ: $(y-4)^2 = -6(x+1)$؟

Ⓐ $y=1$ Ⓑ $y=4$ Ⓒ $x=1$ Ⓓ $x=4$

/11 ما إحداثيات رأس القطع المكافئ: $2(x-2)^2 = (y+3)$ ؟

Ⓐ $(-3, 2)$ Ⓑ $(-2, 3)$ Ⓒ $(2, -3)$ Ⓓ $(3, -2)$

/12 ما معادلة القطع المكافئ: الذي رأسه $(0, 0)$، ومحوره منطبق على محور y ويمر بالنقطة $(-2, 4)$؟

Ⓐ $x^2 = 8y$ Ⓑ $y^2 = 8x$ Ⓒ $x^2 + 8y = 0$ Ⓓ $y^2 + 8x = 0$

/13 طول الوتر البؤري للقطع المكافئ: $(y-5)^2 = -6(x-2)$؟

Ⓐ $\frac{6}{4}$ Ⓑ $-\frac{3}{2}$ Ⓒ 6 Ⓓ -6

/14 ما اتجاه القطع المكافئ $x^2 = 8(y-8)$؟

Ⓐ يمين Ⓑ يسار Ⓒ أسفل Ⓓ أعلى

/15 منحنى القطع المكافئ الذي معادلته $(x-2)^2 = -6(y+1)$ يكون مفتوحا

Ⓐ أفقيا لليسار Ⓑ أفقيا لليمين Ⓒ رأسيا لأعلى Ⓓ رأسيا لأسفل

/16 معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $(x-6)^2 = -4(y-15)$ ؟

Ⓐ $x = 16$ Ⓑ $x = -16$ Ⓒ $y = 16$ Ⓓ $y = -16$

/17 القطع الذي دليله $x = 1$ ، والرأس $(-1, 3)$ يكون مفتوحا لـ:

Ⓐ الأعلى Ⓑ الأسفل Ⓒ اليمين Ⓓ اليسار

تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانيا

القطع الناقص
المحل الهندسي لمجموعة نقاط مستوية يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارا ثابتا, وتسمى النقطتان الثابتتان البؤرتين

المحور الأكبر
القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين والتي نهايتاها على منحنى القطع

المركز
نقطة منتصف المحور الأكبر أو الأصغر

الرأسان
نهايتا المحور الأكبر

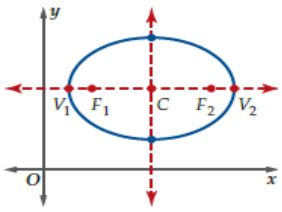
المحور الأصغر
القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والتي نهايتاها على منحنى القطع وتتعامد على المحور الأكبر

الرأسان المرافقان
نهايتا المحور الأصغر

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

القطع الناقص أفقيا

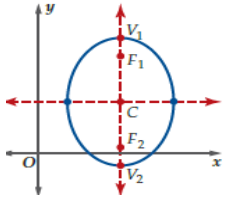
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه	المحور الأكبر أفقي
المركز	(h , k)
البؤرتان	(h ± c , k)
الرأسان	(h ± a, k)
الرأسان المرافقان	(h , k ± b)
المحور الأكبر	Y=k وطوله 2a
المحور الأصغر	X=h وطوله 2b
العلاقة بين a , b , c	$c^2=a^2-b^2$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$
طول البعد البؤري	2c

القطع الناقص رأسيا

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه	المحور الأكبر رأسي
المركز	(h , k)
البؤرتان	(h , k ± c)
الرأسان	(h , k ± a)
الرأسان المرافقان	(h ± b , k)
المحور الأكبر	X=h وطوله 2a
المحور الأصغر	Y=k وطوله 2b
العلاقة بين a , b , c	$c^2=a^2-b^2$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$
طول البعد البؤري	2c

اتجاه القطع الناقص :

- إذا كان $(x-h)^2$ مقسوما على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيا .
- أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسوما على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيا ، حيث $a^2>b^2$ دائما.

البعد البؤري:

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري .
لرسم القطع الناقص نعين نقاطا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a^2}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين

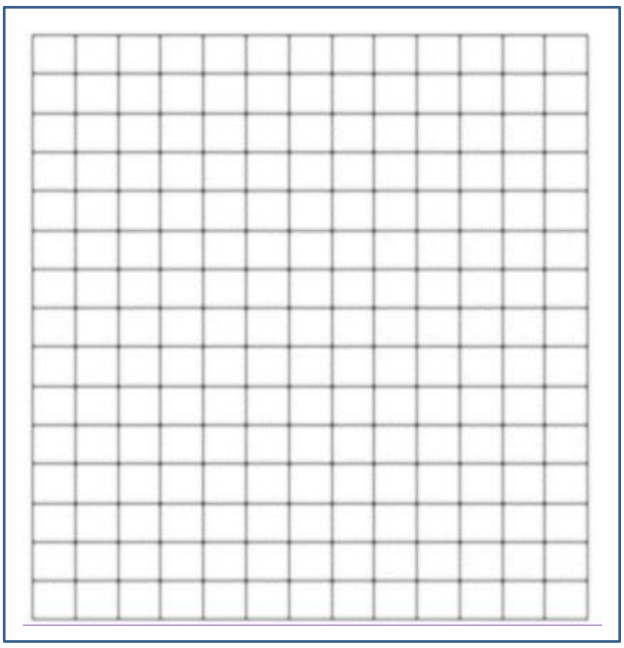
1 تحديدخصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيا

تحقق من فهمك : صـ 56ـ

1A) حدد خصائص القطع الناقص ثم مثله بيانيا $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$:

c =	b =	a =	k =	h =

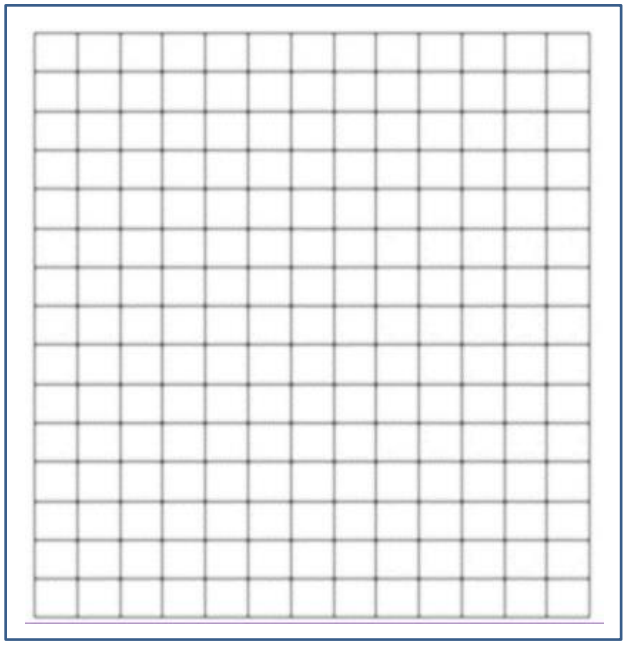
الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر وطوله	
المحور الأصغر وطوله	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	



1B) حدد خصائص القطع الناقص ثم مثله بيانيا $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

c =	b =	a =	k =	h =

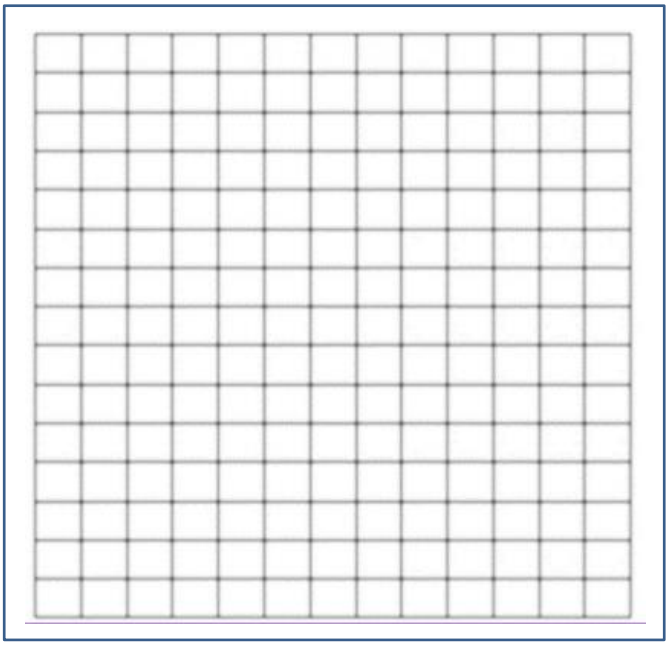
الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر وطوله	
المحور الأصغر وطوله	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	



تدرب: صـ 60ـ

1) $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

c =	b =	a =	k =	h =



الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
الرأسان المرافقان	
المحور الأكبر وطوله	
المحور الأصغر وطوله	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	

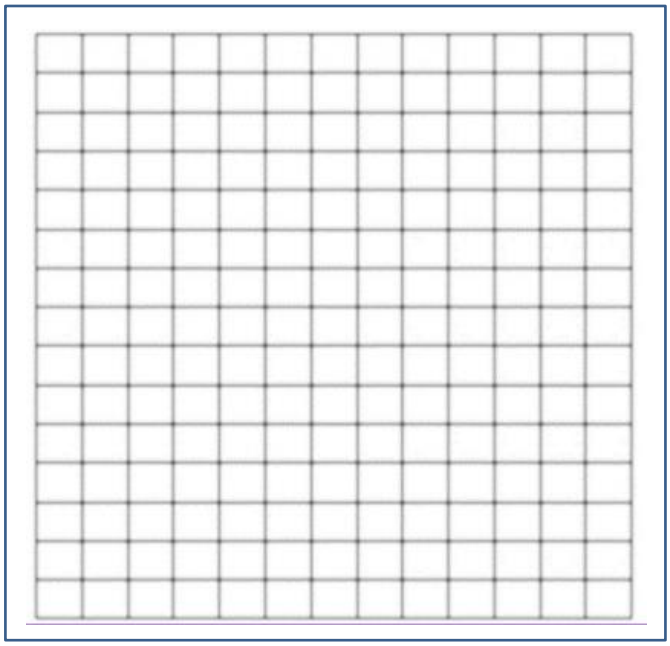
2 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وتحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف

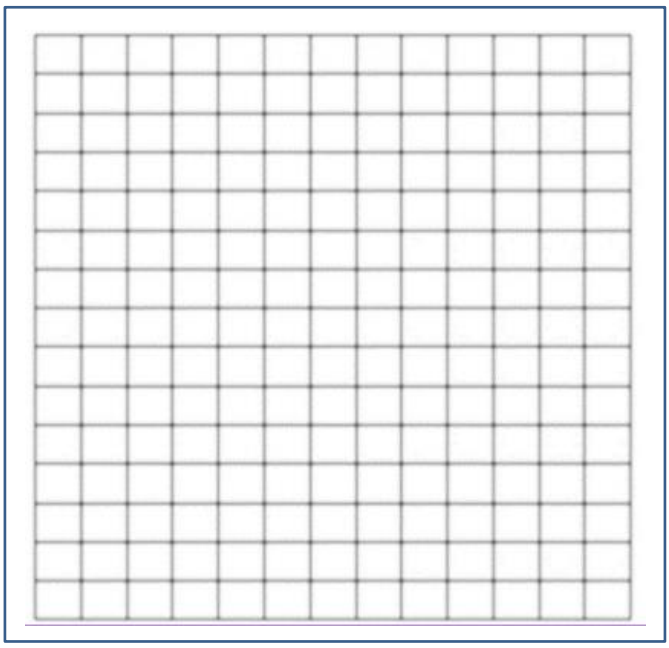
تحقق من فهمك : صـ 57ـ

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

2A) البؤرتان (-7,3) , (19, 3)وطول المحور الأكبر30وحدة



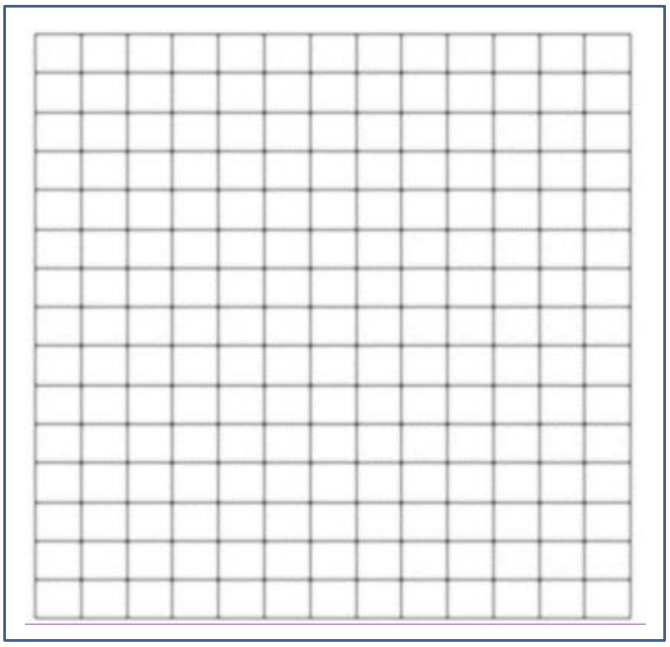
2B) الرأسان (8, 2-), (4-, 2-) وطول المحور الأصغر 10 وحدة



تدرب: صـ 60ـ

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

5) الرأسان (13,-3),(7,-3)والبؤرتان (11,-3) , (5, -3)

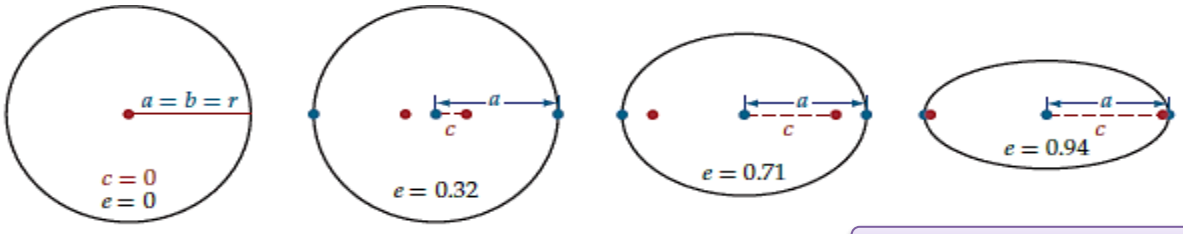


3 الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a}$ هو نسبة c إلى a

حيث c هي المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص

تقع قيمته دائما بين 0,1 وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص



تحقق من فهمك : صـ 56ـ

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

(3A $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

(3B $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

تدرب: صـ 60ـ

(11 $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

4 استعمال الاختلاف المركزي

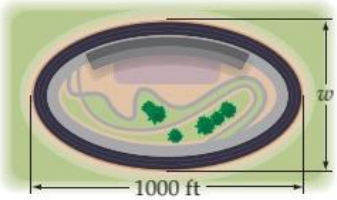
تحقق من فهمك : صـ 58ـ

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 فإذا كان عمق العين 25 mm فما ارتفاعها ؟

تدرب: صـ 60ـ

14) يوضح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75

A) ما أقصى عرض w لمضمار السباق ؟

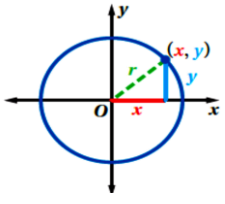


B) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار؟

5 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

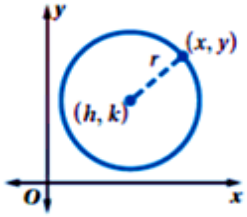
معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل
وطول نصف قطرها r

$(x)^2 + (y)^2 = r^2$



معادلة دائرة مركزها (h, k)
وطول نصف قطرها r

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$



تحقق من فهمك : صـ 59ـ

5A) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (0,0) ونصف قطرها 3.

5B) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (5,0) و قطرها 10.

تدرب: صـ 60ـ

16) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (-4,-3) وقطرها 12

17) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 7

6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

نوجد المركز باستعمال قانون نقطة المنتصف

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

نوجد نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

تحقق من فهمك : صـ 59ـ

6) أوجد معادلة دائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها (1,5) , (-3,-3)

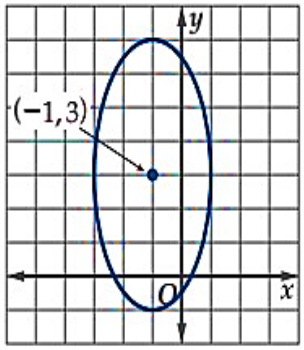
تدرب: صـ 60ـ

18) أوجد معادلة دائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها (2,-4) , (2, 1)

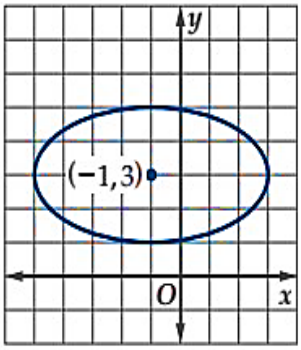
مهارات التفكير العليا: صـ 61ـ

37) اكتشف الخطأ : مثل خالد وياسر بيانيا القطع الناقص الذي مركزه (-3,1) وطول محوره الأكبر 8 وحدات ، وطول محوره الأصغر 4 وحدات ، كما في الشكلين أدناه . هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد



ياسر



تدرب على الاختبار: صـ 61ـ

53) تبعد النقطة k مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M ، نصف قطرها 6 وحدات . فإذا رسم مماس من k إلى الدائرة فما المسافة من k إلى نقطة التماس ؟

A) 6

B) 8

C) 10

D) $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي . أبعاد اللوحة 27 بوصة و15 بوصة . أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة ؟

A $\frac{y^2}{13.5}+\frac{x^2}{7.5}=1$

B $\frac{y^2}{182.25}+\frac{x^2}{56.25}=1$

C $\frac{y^2}{56.25}+\frac{x^2}{182.25}=1$

D $\frac{y^2}{7.5}+\frac{x^2}{13.5}=1$

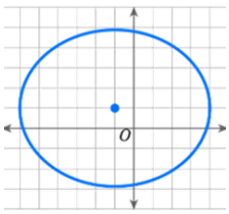
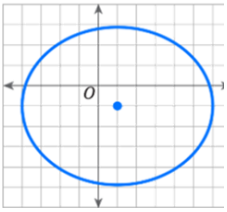
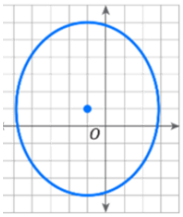
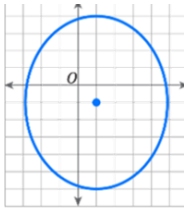
الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 في القطع الناقص: $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$ طول المحور الأكبر...

Ⓐ 4 وحدات Ⓑ 6 وحدات Ⓒ 12 وحدة Ⓓ 18 وحدة

/2 التمثيل البياني للقطع الذي معادلته : $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ هو...

Ⓐ  Ⓑ  Ⓒ  Ⓓ 

/3 مركز القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$ هو...

Ⓐ $(5,7)$ Ⓑ $(7,5)$ Ⓒ $(-5,-7)$ Ⓓ $(-7,-5)$

/4 ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته : $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

Ⓐ $e = 0.66$ Ⓑ $e = 1$ Ⓒ $e = 1.25$ Ⓓ $e = 1.66$

/5 قطع ناقص المسافة بين بؤرتيه 10 وحدات وطول محوره الأكبر 16 وحدة فإن اختلافه المركزي e يساوي .....

Ⓐ $\frac{5}{8}$ Ⓑ $\frac{8}{5}$ Ⓒ 6 Ⓓ 10

/6 القطع الذي اختلافه المركزي $e = 0$ عبارة عن .....

Ⓐ قطع مكافئ Ⓑ قطع زائد Ⓒ دائرة Ⓓ مربع

/7 في القطع الناقص قيمة الاختلاف المركزي تنحصر بين 0 و.....

Ⓐ -2 Ⓑ -1 Ⓒ 1 Ⓓ 2

/8 في القطع الناقص: $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ، طول المحور الأصغر هو...

Ⓐ 3 وحدات Ⓑ 5 وحدات Ⓒ 6 وحدات Ⓓ 10 وحدات

/9 أي القطوع الناقصة التالية مركزه النقطة : $(3, 1)$؟

Ⓐ $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ Ⓑ $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$ Ⓒ $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$ Ⓓ $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$

تحصيلي رياضيات

/10 إحداثيا الرأسان المرافقان للقطع الناقص : $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$

Ⓐ $(6, -3 \pm 4)$ Ⓑ $(6 \pm 4, -3)$ Ⓒ $(6, -3 \pm 3)$ Ⓓ $(6 \pm 3, -3)$

/11 مركز القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-5)^2}{2} = 1$ هو...

Ⓐ $(-1, -5)$ Ⓑ $(1,5)$ Ⓒ $(-1,5)$ Ⓓ $(1, -5)$

/12 ما مركز الدائرة التي معادلتها: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ ؟

Ⓐ $(-2, -1)$ Ⓑ $(-2,1)$ Ⓒ $(2, -1)$ Ⓓ $(2,1)$

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيا

القطع الزائد
المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارا ثابتا.

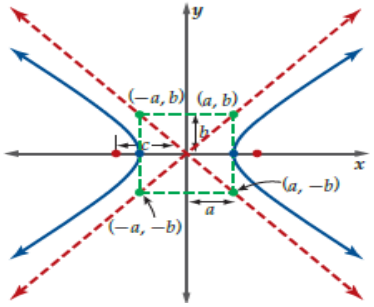
مكوناته
يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي التقارب

المحور المرافق
محور تماثل للقطع عمودي على المحور القاطع ويمر بالمركز
أو
القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع ويمر بالمركز

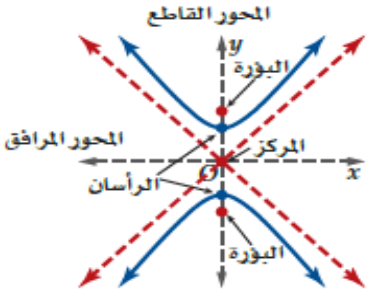
المحور القاطع
محور تماثل للقطع يمر بالرأسين
أو
القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين ويمر في المركز

المركز
نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين

الرأسان
نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى



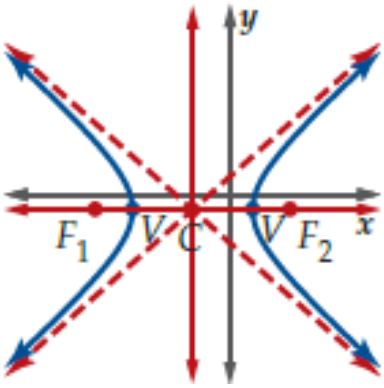
يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه ، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه ، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a ، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

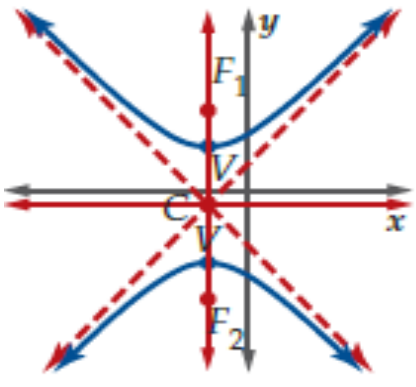
القطع الزائد أفقيا

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$



القطع الزائد رأسيا

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



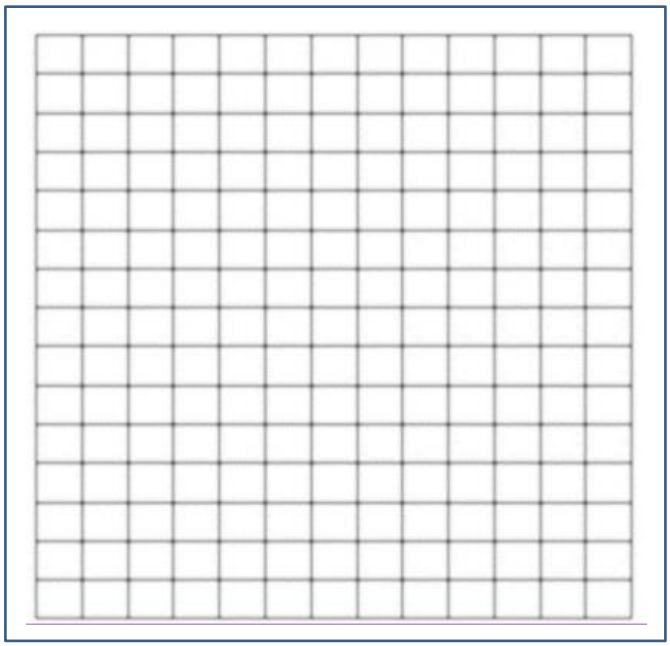
1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاه على الصورة القياسية

تحقق من فهمك : صـ 65ـ

1A) حدد خصائص القطع الزائد ثم مثله بيانيا $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

c =	b =	a =	k =	h =

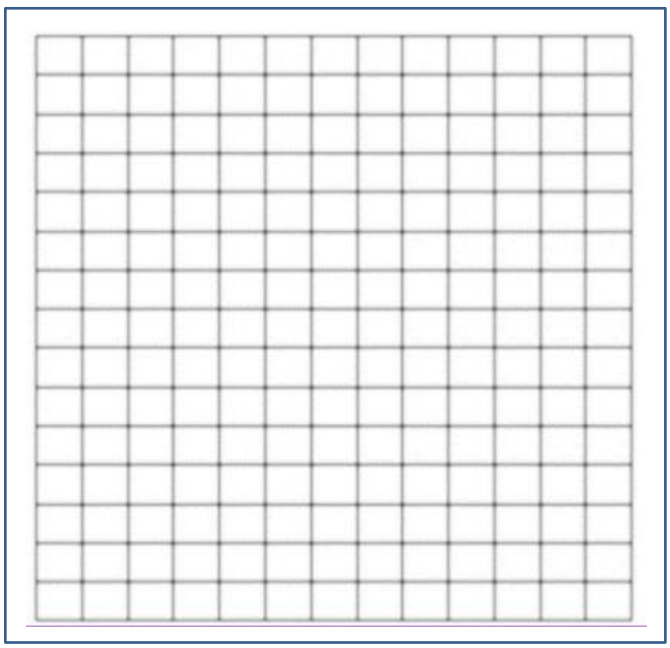
الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
المحور المرافق وطوله	
المحور القاطع وطوله	
خطا التقارب	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	



1B) حدد خصائص القطع الزائد ثم مثله بيانيا: $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

c =	b =	a =	k =	h =

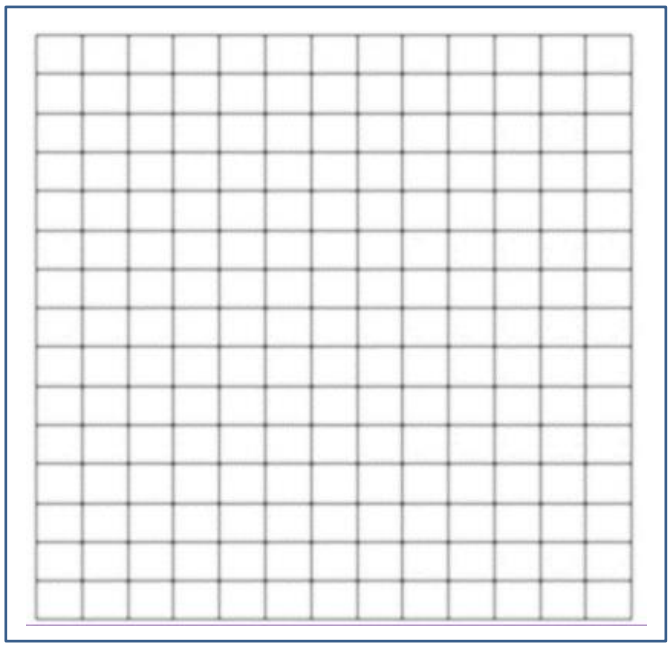
الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
المحور المرافق وطوله	
المحور القاطع وطوله	
خطا التقارب	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	



تدرب: صـ 69ــ

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

c =	b =	a =	k =	h =



الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
المحور المرافق وطوله	
المحور القاطع وطوله	
خطا التقارب	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	

2 كتابة معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية

تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وتحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف وقانون المسافة

تحقق من فهمك : صـ 66ـ

اكتب معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية في كل مما يأتي ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانيا

(2A $4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$

معادلة القطع الزائد هي:

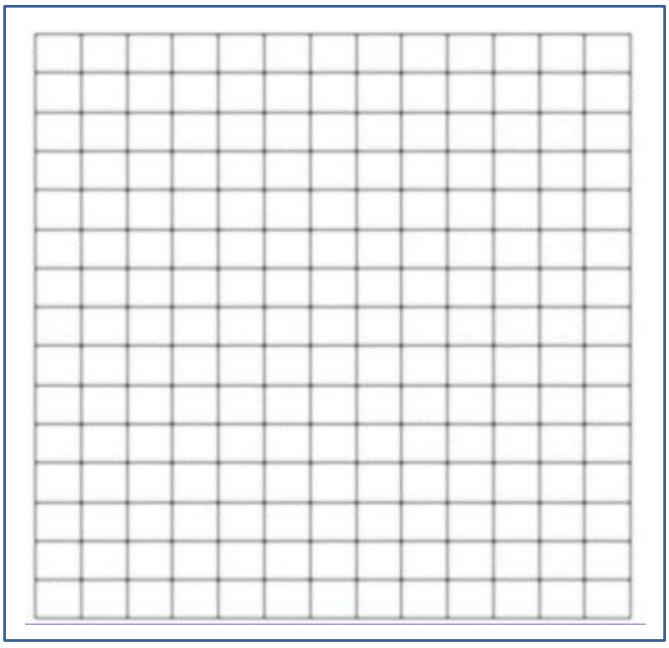
$c =$	$b =$	$a =$	$k =$	$h =$

الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
المحور المرافق وطوله	
المحور القاطع وطوله	
خطا التقارب	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	

(2B $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

معادلة القطع الزائد هي:

$c =$	$b =$	$a =$	$k =$	$h =$



الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
المحور المرافق وطوله	
المحور القاطع وطوله	
خطا التقارب	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	

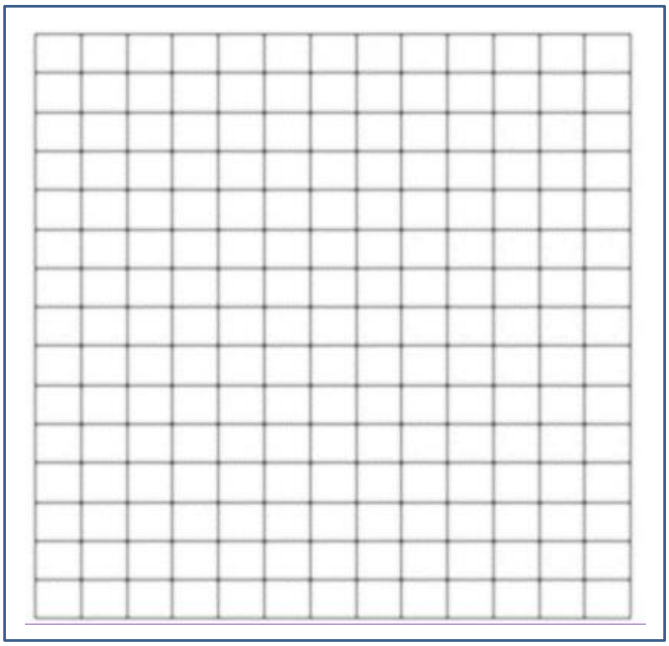
تدرب: صـ 192ـ

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

معادلة القطع الزائد هي:

$c =$	$b =$	$a =$	$k =$	$h =$

الاتجاه	
المركز	
البؤرتان	
الرأسان	
المحور المرافق وطوله	
المحور القاطع وطوله	
خطا التقارب	
العلاقة بين a , b, c	
طول البعد البؤري	



3 كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه

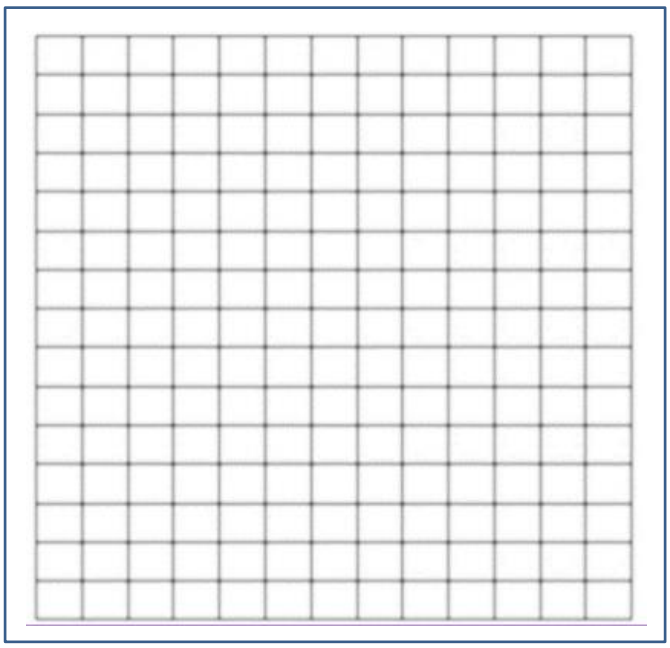
الرأسان أو البؤرتان

إذا كان لرأسي القطع أو بؤرتي القطع الاحداثي **y** نفسه فإن المحور القاطع **أفقي** ،
وإذا كان الاحداثي **x** نفسه فإن المحور القاطع **رأسي**

تحقق من فهمك : صـ 67ـ

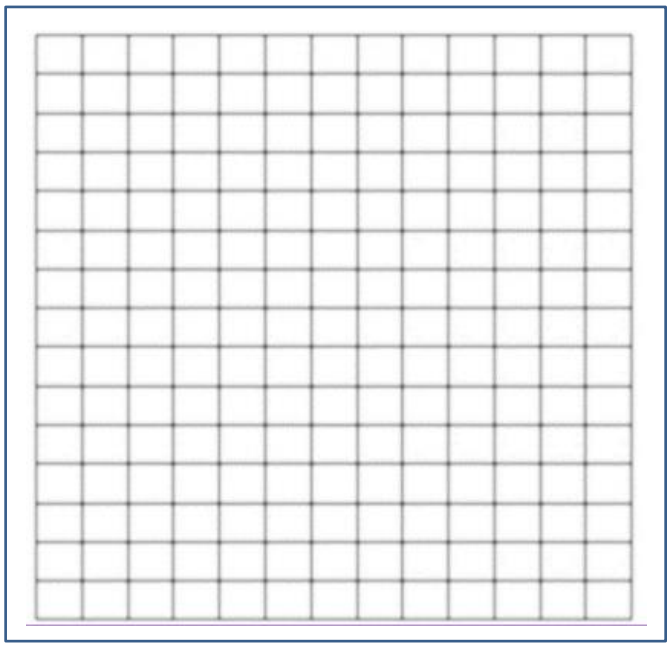
اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

3A) الرأسان (3,6) ، (3, 2)وطول المحور المرافق 10وحدات



3B) البؤرتان (2-, 12), (2,-2)وخطا التقارب

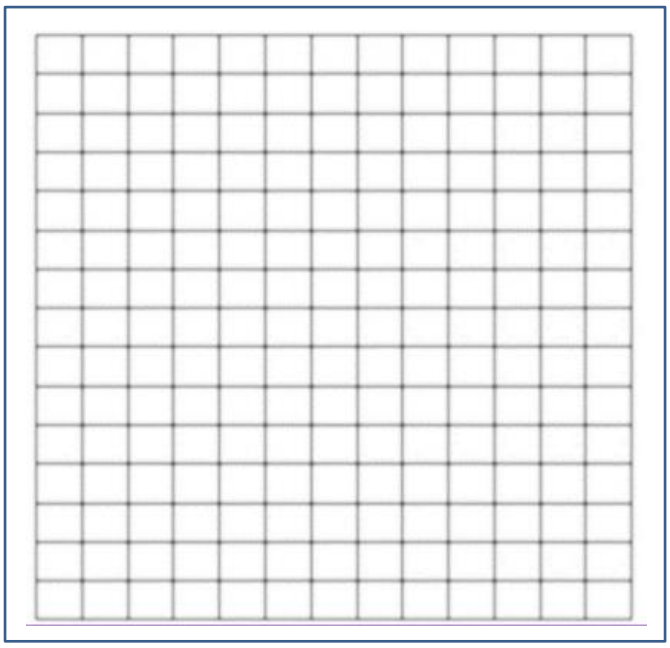
$$y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4} \ , y = \frac{-3}{4}x + \frac{13}{4}$$



تدرب: صـ 69ـ

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

14) الرأسان (-5,5),(7,5)والبؤرتان (-9,5) , (11, 5)



4 الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a}$ هو نسبة c إلى a

قيمته دائما أكبر من 1 وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى

تحقق من فهمك : صـ 68ـ

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

تدرب: صـ 70ـ

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

5 تطبيقات على القطع الزائد

تحقق من فهمك : صـ 69ـ

5) تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلا بحريا

A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه ، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين (100 ,0) , (-100,0)

B) أوجد إحداثي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين ، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها (100, 0)

تدرب: صـ 70ــ

28) يأخذ برج (كوب بورت) في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق . افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

A) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8m، فما معادلة القطع الزائد؟

B) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة ؟

مهارات التفكير العليا: صـ 71ــ

36) تبرير: افترض أنك أعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية:

رأسين ,بؤرتين , المحور القاطع , المحور الأفقي , خطي تقارب.

هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع دائما أو أحيانا أو غير ممكن أبدا ؟

تدرب على الاختبار: صـ71ـ

47) مراجعة: يمثل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعا زائدا .

ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x \ , y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x \ , y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x \ , y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x \ , y = -\frac{1}{5}x$

48) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد

الذي معادلته: $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 في القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ طول المحور القاطع :...

Ⓐ 3 وحدات Ⓑ 4 وحدات Ⓒ 6 وحدة Ⓓ 8 وحدة

/2 مركز القطع الزائد $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$ هو النقطة.....

Ⓐ (5,4) Ⓑ (4,5) Ⓒ (-5,4) Ⓓ (5,-4)

/3 المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{(y-7)^2}{16} - \frac{(x-5)^2}{9} = 1$ هو:...

Ⓐ $x = 5$ Ⓑ $x = 7$ Ⓒ $y = 5$ Ⓓ $y = 7$

/4 ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ؟

Ⓐ $y = \pm 4x$ Ⓑ $y = \pm\frac{3}{4}x$ Ⓒ $y = \pm\frac{4}{3}x$ Ⓓ $y = \pm\frac{9}{16}x$

/5 أي القطوع الزائدة التالية طول محوره المرافق 10 وحدات؟

Ⓐ $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$ Ⓑ $\frac{y^2}{25} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$ Ⓒ $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{10} = 1$ Ⓓ $\frac{y^2}{10} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

/6 ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد : $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

Ⓐ $(y-1) = \pm\frac{9}{16}(x+2)$ Ⓑ $(y-1) = \pm\frac{16}{9}(x+2)$ Ⓒ $(y-1) = \pm\frac{3}{4}(x+2)$ Ⓓ $(y-1) = \pm\frac{4}{3}(x+2)$

/7 الاختلاف المركزي للقطع الزائد : $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = 1$ يساوي ...

Ⓐ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{31}}{2}$ Ⓒ $\frac{2}{\sqrt{13}}$ Ⓓ $\frac{2}{\sqrt{31}}$

1 الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
حيث A,B,C لا تساوي جميعها أصفارا

ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت B=0

تحقق من فهمك : صـ 72ـ

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله

تدرب: صـ 74ـ

1) اكتب المعادلة $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$ على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله

2) اكتب المعادلة $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$ على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله

2 تحديد أنواع القطوع المخروطية

تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

دائرة	قطع ناقص	قطع مكافئ	قطع زائد
$B^2 - 4ac < 0$	$B^2 - 4ac < 0$	$B^2 - 4ac = 0$	$B^2 - 4ac > 0$
$B = 0 , A = C$	$B \neq 0 , A \neq C$		

تحقق من فهمك : صـ 73ـ

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية

(2A $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

(2B $3\,xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

(2C $3x^2 + 16\,x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

تدرب: صـ 74ـ

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16\,x + 24 = 0$

مهارات التفكير العليا: صـ 75ـ

21) **تبرير**: ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا
(عندما يكون القطع رأسيا وتكون **A=C** فإن القطع دائرة) ؟

تدرب على الاختبار: صـ75ـ

31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثل قطعا مكافئا أو دائرة أو قطعا ناقصا أو قطعا زائدا، دون كتابتها على الصورة القياسية .

32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثل قطعا مكافئا رأسه عند النقطة (2 ,2) ، ويمر بالنقطة (0 ,6) ؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

1/ ما نوع القطع الذي تمثله المعادلة : $4x^2 - 3y^2 + 8y - 12 - 2x + 4y = 0$

Ⓐ قطع مكافئ Ⓑ قطع زائد Ⓒ قطع ناقص Ⓓ دائرة

2/ أي التالي يمثل قطعا ناقصا؟

Ⓐ $25x^2 - 25y^2 - 20x + 10y + 457 = 0$ Ⓒ $25x^2 - y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$

Ⓑ $25x^2 + y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$ Ⓓ $25x^2 - 19x + 22y + 457 = 0$

3/ ما قيمة C التي تجعل منحنى المعادلة : $4x^2 + Cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرة ؟

Ⓐ -8 Ⓑ -4 Ⓒ 4 Ⓓ 8

الفصل الخامس

المتجهات

- مقدمة في المتجهات
- المتجهات في المستوى الاحداثي
- الضرب الداخلي
- المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
- الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1 تحديد الكميات المتجهة:

الكميات

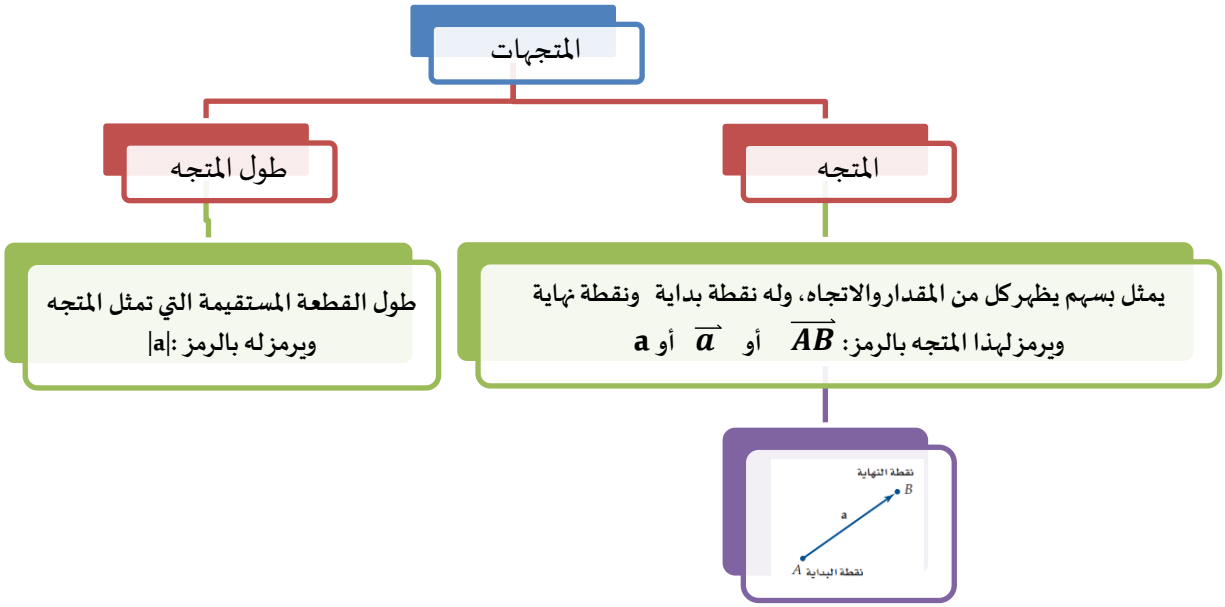
1. كمية قياسية : لها مقدارفقط
2. كمية متجهة : لها مقدارو اتجاه

تحقق من فهمك : صـ 85ـ حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية)في كل مما يلي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60mi/h ، وبزاوية 60° جهة الجنوب الشرقي.	1B) هبوط مضلي رأسيا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi/h.	1C) طول قطعة مستقيمة 5 cm. .....

تدرب: صـ 91ـ حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية)في كل مما يلي:

2) مساحة مربع $20cm^2$	3) يركض غزال بسرعة 15m/s ، باتجاه الغرب.	4) المسافة التي تقطعها كرة قدم 5m.	6) رمي حجررأسيا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s . .....

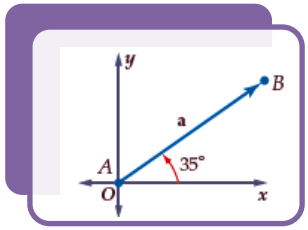


2 تمثيل المتجه هندسيا

اتجاه المتجه

اتجاه أفقي(قياسي)

نبدأقياس الزاوية من محور السينات الموجبة لأعلى (عكس عقارب الساعة)

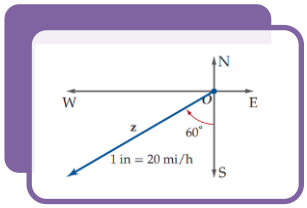


الاتجاه الربعي φ

نبدأ قياس الزاوية من الخط الرأسي (N أو S) باتجاه الشرق E أو الغرب W

قياسها بين $0°$ و $90°$

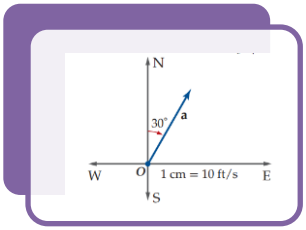
وتكتب الزاوية بين حرفين الاتجاه مثل $S35°E$:



الاتجاه الحقيقي

نبدأ قياس الزاوية من الشمال N نزولا (مع عقارب الساعة)

يعطى قياس الزاوية بثلاث أرقام

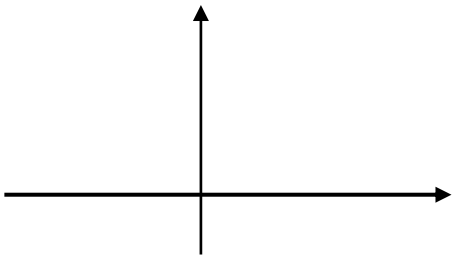


إذا أعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام ولم تعط أي مركبات اتجاهية إضافية فإنها زاوية اتجاه حقيقي

تحقق من فهمك: صـ 219ـ

استعمل مسطرة و منقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية ، واكتب مقياس الرسم في كل حالة

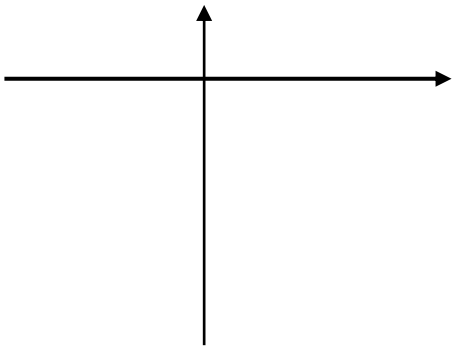
(2A $t = 20\ ft/s$ ، باتجاه $065°$.



.....

.....

(2B $u = 15mi/h$ ، باتجاه $S25°E$.

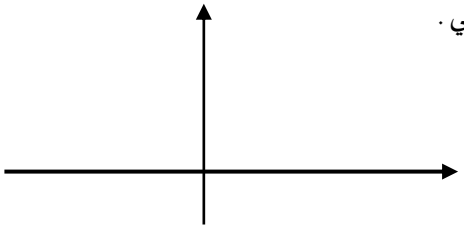


.....

.....

2c) $m = 60N$ ، بزاوية قياسها: $80°$ مع الاتجاه الأفقي .

.....

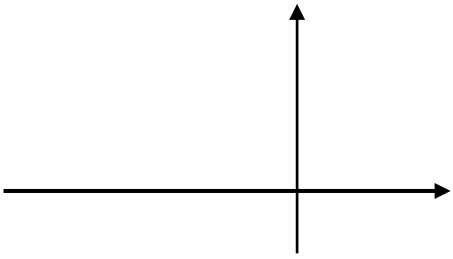


تدرب: صـ 91ــ

8) $g = 6\ km/h$ ، باتجاه: $N70°W$.

.....

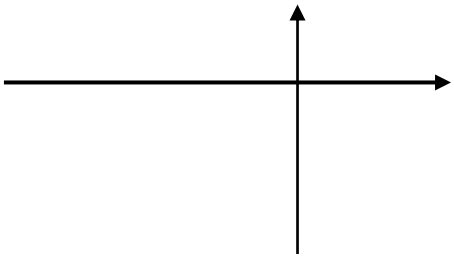
.....



9) $j = 5\ ft/s$ ، بزاوية قياسها: $300°$ مع الأفقي .

.....

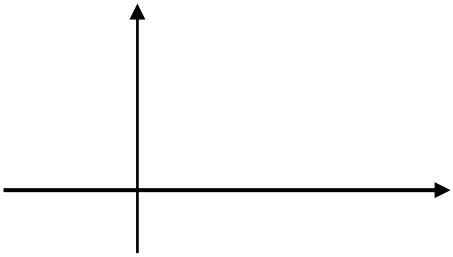
.....



12) $n = 32\ m/s$ ، باتجاه: $030°$.

.....

.....

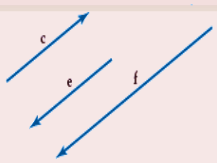


أنواع المتجهات

المتجهات المتوازية

لهما الإتجاه نفسه أو متعاكستان

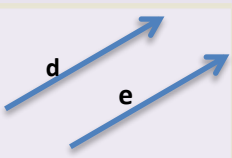
ليس بالضرورة لهما الطول نفسه



المتجهات المتساوية

لهما الإتجاه نفسه

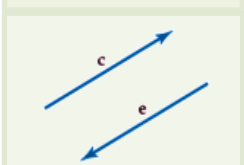
لهما الطول نفسه



المتجهات المتعاكسة

لهما اتجاهين مختلفين

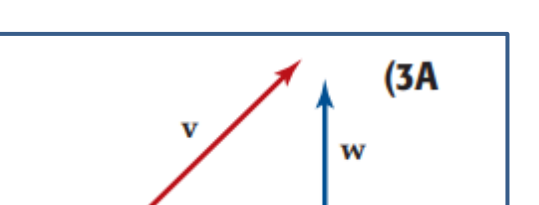
لهما الطول نفسه



3 إيجاد محصلة متجهين:

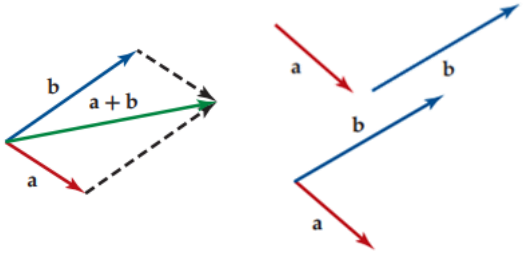
قاعدة المثلث

لابد أن تلتقي بداية المتجه الثاني مع نهاية المتجه الأول وبالتالي تكون بداية المحصلة هي بداية المتجه الأول ونهايتها هي نهاية المتجه الثاني



قاعدة متوازي الأضلاع

لابد أن تلتقي بداية المتجه الثاني مع بداية المتجه الأول ومن ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع وبالتالي تكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع

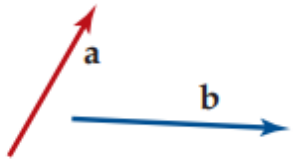


تحقق من فهمك : صـ 89ـ

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي

(3A

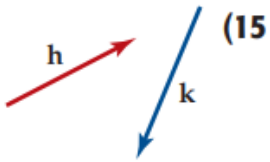
(3B



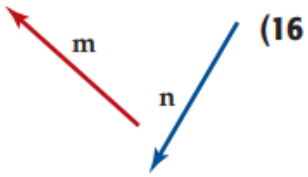
(3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة 7in /s ، باتجاه 310° ، فارتدت باتجاه 055°، وبسرعة 4in /s . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة و اتجاهها .(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة ، والإتجاه إلى أقرب درجة)

تدرب: صـ 91ـ أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي

(15



(16



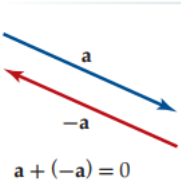
تدرب: صـ 91ـ حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين و اتجاهها في كل مما يأتي:

18) 18N للأمام ، ثم 20 N للخلف .....

19) 100 m للشمال ، ثم 350 m للجنوب .....

20) 17 mi شرقا ، ثم 16 mi جنوبا .....

21) $15m\backslash s^2$ باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي ، ثم $9.8\ mi\backslash s^2$ إلى الأسفل .....

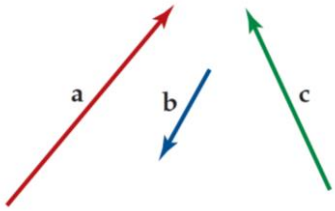


عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه فإن المحصلة هي المتجه الصفري يرمزله بالرمز $\vec{0}$ أو 0، وليس له اتجاه

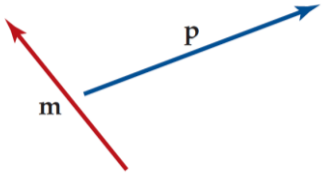
4 العمليات على المتجهات

تحقق من فهمك : صـ 89ـ ارسم المتجه الذي يمثل كلا مما يأتي:

(4A $a - c + 2b$

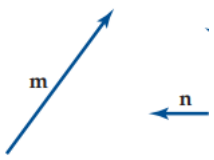


(4B $m - \frac{1}{4}p$



تدرب: صـ 91ــ استعمل المتجهات الآتية لرسم المتجه الذي يمثل :

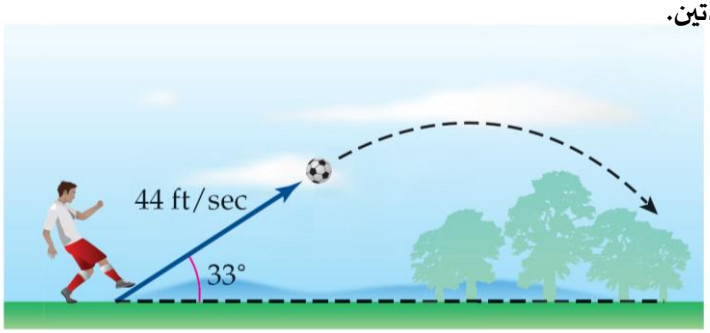
22) $m - 2n$



5 تحليل القوى إلى مركبتين متعامدتين

تحقق من فهمك : صـ 90ــ

5 - A) ارسم شكلا يوضح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.



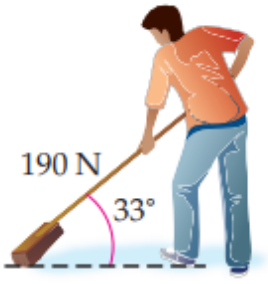
B) أوجد مقداركل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة..

الأفقية	الرأسية
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

تدرب: صـ 92ــ

29) تنظيف: يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها $190N$ ، وبزاوية قياسها $33°$ مع سطح الرض كما في الشكل .

A) ارسم شكلا يوضح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين.

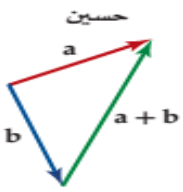


B) أوجد مقداركل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة..

الأفقية	الرأسية
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....

مهارات التفكير العليا: صـ 93ـ

43) **اكتشف الخطأ:** حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a , b ، أيهما كانت إجابته صحيحة برر إجابتك.



.....

.....

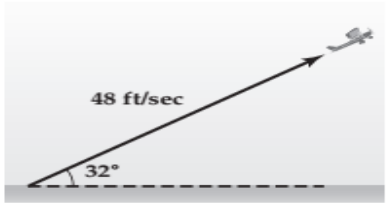
.....

.....

.....

تدرب على الاختبار: صـ 93ـ

56) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بعد بزاوية قياسها $32°$ مع الأفقي ، وبسرعة $48 ft/s$ كما في الشكل، أي مما يأتي يمثل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



A) $25.4 ft/s$, 40.7 ft/s

B) $40.7 ft/s$, 25.4 ft/s

C) $56.6 ft/s$, 90.6 ft/s

D) $90.6 ft/s$, 56.6 ft/s

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

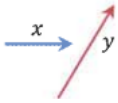
/1 أي الكميات التالية كمية متجهة؟

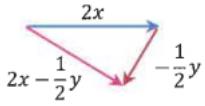
Ⓐ الزمن Ⓑ المسافة Ⓒ الإزاحة Ⓓ الكتلة

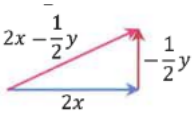
/2 إذا كان المتجه $\langle 3,5 \rangle = a$ يوازي المتجه b وعكس اتجاهه، فإن b يساوي ....

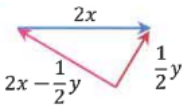
Ⓐ $\langle -3, -5 \rangle$ Ⓑ $\langle 0,3 \rangle$ Ⓒ $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right\rangle$ Ⓓ $\langle 6,10 \rangle$

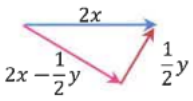
/3 إذا كان الشكل يمثل المتجهين x,y فأي التالي يمثل



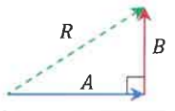
Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

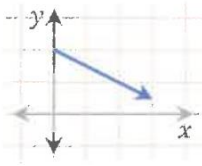
Ⓓ 

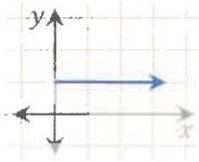
/4 في الشكل المجاور إذا كانت قيمة المتجه A تساوي 8 ، وقيمة المتجه B تساوي 6 ، فما قيمة متجه المحصلة ؟

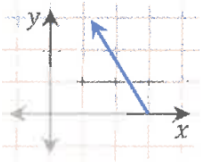


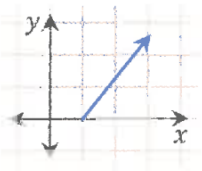
Ⓐ 2 Ⓑ 14 Ⓒ 10 Ⓓ 16

/5 أي المتجهات التالية له مركبة أفقية أكبر؟

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

/6 تسير باخرة بزاوية قيمتها 60° مع الأفقي وبسرعة 100 km/h ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة؟

Ⓐ 50 km / h Ⓑ $50\sqrt{3}$ km / h Ⓒ 200 km / h Ⓓ $200\sqrt{3}$ km / h

/7 إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه 155° فإن اتجاهه الربعي هو...

Ⓐ N55°E Ⓑ S25°E Ⓒ W55°S Ⓓ N35°E

/8 المركبة الرأسية لمتجه طوله $5in$, وقياس زاوية اتجاهه 32°

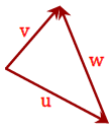
Ⓐ 4.24 iN Ⓑ 2.65 iN Ⓒ 2.79 iN Ⓓ 31.88 iN

/9 إذا كان اتجاه متجه 180° فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي....

Ⓐ 90° Ⓑ 180° Ⓒ 270° Ⓓ 300°

تحصيلي رياضيات

/10 المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين في الشكل هو:....

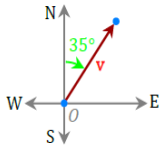


Ⓐ V Ⓑ u Ⓒ W Ⓓ $W+V$

/11 إذا كان اتجاه متجه $120°$ فإن قياس زاوية اتجاهه الربعي ....

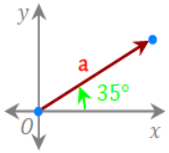
Ⓐ N 30° W Ⓑ N 30° E Ⓒ N 60° W Ⓓ N 60° E

/12 زاوية الاتجاه الربعي للمتجه في الشكل



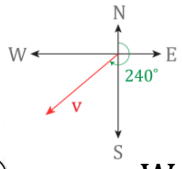
Ⓐ N 35° E Ⓑ N 55° E Ⓒ W 55° S Ⓓ N 35° W

/13 قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه في الشكل



Ⓐ 35° Ⓑ 035° Ⓒ 055° Ⓓ 090°

/14 في الشكل زاوية الاتجاه الربعي للمتجه هو:



Ⓐ S 60° W Ⓑ E 60° S Ⓒ W 60° S Ⓓ S 240° W

/15 يتحرك خالد بسرعة 3 km /h باتجاه مسجدالحي فيقطع مسافة 550 m جنوبا ثم يواصل المشي 200 m شرقا فيصل إلى المسجد بعد 15 دقيقة ما الكمية القياسية؟

Ⓐ 200 m شرقا Ⓑ 3 km /h باتجاه المسجد Ⓒ 550 m جنوبا Ⓓ 15 دقيقة

/16 عند تحليل المتجه إلى مركبتيه ، فإن مقدار المتجه الأساسي يساوي

Ⓐ قسمة إحدى مركبتيه Ⓑ تزيد قيمة مركبتيه Ⓒ حاصل ضرب مركبتيه Ⓓ كتوسط قيمة مركبتيه

1 التعبير عن المتجه في الصورة الاحداثية :

الصورة الاحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A\ (x_1,y_1)$ ، ونقطة نهايته $B\ (x_2\ ,y_2)$ ، هي : $\langle x_2 - x_1\ ,y_2 - y_1 \rangle$

تحقق من فهمك : صـ 94ـ

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

(1A $A\ (-2\ ,-7)، B\ (6\ ,1)$

(1B $A\ (0\ ,8)، B\ (-9\ ,-3)$

2 إيجاد طول المتجه :

إذا كان v متجها نقطة بدايته (x_1,y_1) ، ونقطة نهايته $(x_2\ ,y_2)$،فإن طول v هو:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}$$

وإذا كانت $\langle a\ ,b \rangle$ الصورة الاحداثية للمتجه v فإن :

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

تحقق من فهمك : صـ 95ـ

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

(2A $A\ (-2\ ,-7)، B\ (6\ ,1)$

(2B $A\ (0\ ,8)، B\ (-9\ ,-3)$

تدرب: صـ 99ـ

أوجد الصورة الإحداثية و طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

(1 $A\ (-3\ ,1)، B\ (4\ ,5)$

(2 $A\ (2\ ,-7)، B\ (-6\ ,9)$

3 العمليات على المتجهات:

تحقق من فهمك : صـ 95ـ

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2\ ,5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3\ ,0\rangle\ ,\mathbf{c} = \langle -4\ ,1\rangle$:

(3A $4\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}$

(3B $-3\boldsymbol{c}$

(3C $2\boldsymbol{c} + 4\boldsymbol{a}\ - \boldsymbol{b}$

تدرب: صـ 99ـ

إذا كان : $\mathbf{h} = \langle -6\ ,2\rangle\ ,\ \mathbf{g} = \langle -3\ ,\ -5\rangle\ ,\ \mathbf{f} = \langle 8\ ,0\rangle,$ فأوجد :

(9 $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\boldsymbol{h}$

(12 $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \boldsymbol{h}$

4 إيجاد متجه وحده له نفس الاتجاه لمتجه معطى:

تحقق من فهمك : صـ 96ـ

أوجد متجه الوحده الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي:

(4A $\mathbf{w} = \langle 6 , -2 \rangle$

(4B $x = \langle -4 , -8 \rangle$

تدرب: صـ 99ـ

أوجد متجه الوحده الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي:

(13 $v = \langle -2 ,7 \rangle$

5 كتابة متجه على صورة تو افق خطي لمتجهي الوحدة:

برمز لمتجهي الوحدة بالرمزين:
$\mathbf{i} = \langle 1 ,0 \rangle$, $j = \langle 0,1 \rangle$ على الترتيب
كما يسمى المتجهان $\mathbf{i}$, j متجهي الوحدة القياسيين

يمكن استعمال المتجهين : $\mathbf{i}$, j للتعبير عن أي متجه $\langle a ,b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = \mathbf{a}\,\mathbf{i} + b\,j$
وتسمى الصورة $\mathbf{a}\,\mathbf{i} + b\,j$ **توافقا خطيا** للمتجهين $\mathbf{i}$, j

تحقق من فهمك : صـ 97ـ

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة تو افق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}$, j في كل مما يلي:

(5A $D(-6,0) , E(2,5)$

(5B $D(-3,-8) , E(7,1)$

تدرب: صـ 99ـ

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة تو افق خطي لمتجهي الوحدة $\boldsymbol{j}$, $\mathbf{i}$ في كل مما يلي:

19) $D(4,-1)$,$E(5,-7)$

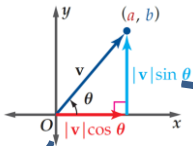
.....

.....

.....

6 إيجاد الصورة الإحداثية:

$$\mathrm{V} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$$
$$= |\boldsymbol{v}|(\cos\theta)\mathbf{i} + |\boldsymbol{v}|(\sin\theta)\,\boldsymbol{j}$$



تحقق من فهمك : صـ 97ـ

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه V المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يلي:

6A) $|V| = 8 \text{ ، } \theta = 45°$

.....

.....

.....

.....

.....

6B) $|V| = 24 \text{ ، } \theta = 210°$

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: صـ 100ـ

25) $|V| = 12 \text{ ، } \theta = 60°$

.....

.....

.....

.....

.....

27) $|V| = 4 \text{ ، } \theta = 135°$

.....

.....

.....

.....

.....

7 زوايا الاتجاه للمتجهات:

لإيجاد زاوية اتجاه المتجه $V = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي الموجب نحل المعادلة :

$$V = \langle a, b \rangle$$

أو

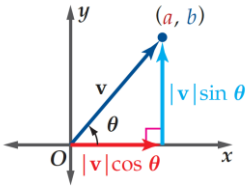
$$\tan\theta = \frac{|V| \sin\theta}{|V| \cos\theta}$$

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان بناء على العلاقة :

$$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$$

إذا كانت قيمة $\tan\theta$ **موجبة** فإن θ تقع **في الربع الأول أو الثالث**

إذا كانت قيمة $\tan\theta$ **سالبة** فإن θ تقع **في الربع الثاني أو الرابع**



تحقق من فهمك : صـ 98ـ

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتين مع الاتجاه الموجب لمحور x :

(7A $-6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$

(7B $\langle -3, -8 \rangle$

تدرب: صـ 100ـ

(29 $3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$

(32 $\langle -5, 9 \rangle$

8 من و اقع الحياة:

تحقق من فهمك : صـ 99ــ

8) كرة قدم : يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة $7m/s$ ليرمي الكرة بسرعة $25\ m/s$ ، بزاوية $40°$ مع الأفقي ،

أوجد محصلة السرعة

تدرب: صـ 100ــ

33) ملاحة جوية : تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها $600\ mi/h$ وتهب الرياح بسرعة مقدارها $85mi/h$ ،

باتجاه $S\ 59°E$،

a) أوجد محصلة سرعة الطائرة .

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة .

مهارات التفكير العليا: صـ 101ـ

43) **تبرير** : إذا كان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متجهين متوازيين فعبر عن كل من المتجهين بالصورة الإحداثية مبينا العلاقة بين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب على الاختبار: صـ 101ـ

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته (5,2) ، ونقطة نهايته $(-4, -3)$ ؟

.....

.....

.....

.....

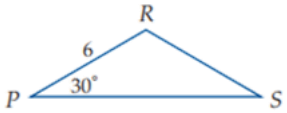
.....

.....

A $\sqrt{2}$ C $\sqrt{82}$

B $\sqrt{26}$ D $\sqrt{106}$

56) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$؟



.....

.....

.....

.....

.....

.....

A $9\sqrt{2}$ C $18\sqrt{2}$

B $9\sqrt{3}$ D $18\sqrt{3}$

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

/1 ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $A\,(-4\,,1\,),\ B\,(2\,,-5\,)$ ؟

Ⓐ $\langle -8\,,-5\rangle$ Ⓑ $\langle -4\,,1\rangle$ Ⓒ $\langle 6\,,-6\rangle$ Ⓓ $\langle 2,-5\rangle$

/2 طول المتجه $\mathbf{C}=\langle 0\,,6\rangle$ يساوي ....

Ⓐ 8 Ⓑ 6 Ⓒ 4 Ⓓ 2

/3 أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟

Ⓐ $\langle 2\,,4\rangle$ Ⓑ $\langle\sqrt{5},1\rangle$ Ⓒ $\langle 3\sqrt{3}\,,3\rangle$ Ⓓ $\langle 2,\sqrt{3}\rangle$

/4 إذا كان لدينا المتجهين $\mathbf{B}=\langle 1\,,4\rangle$ ، $\mathbf{A}=\langle 5\,,-3\rangle$ فأوجد $\mathbf{2A-B}$

Ⓐ $\langle 9\,,-10\rangle$ Ⓑ $\langle 6\,,1\rangle$ Ⓒ $\langle 4\,,-7\rangle$ Ⓓ $\langle -3\,,11\rangle$

/5 إذا كان , $\mathbf{A}=\langle 3\,,4\rangle$ $\mathbf{B}=\langle 2\,,-1\rangle$ فأوجد $\mathbf{3A-B}$

Ⓐ $\langle 7\,,13\rangle$ Ⓑ $\langle 1\,,5\rangle$ Ⓒ $\langle 11\,,13\rangle$ Ⓓ $\langle 7\,,3\rangle$

/6 إذا كان $\mathbf{A}=\langle 1,2\rangle$ $C=\langle 4\,,0\rangle$, $\mathbf{B}=\langle -3\,,5\rangle$, فأوجد $\mathbf{C-2A+B}$

Ⓐ $\langle 1\,,-1\rangle$ Ⓑ $\langle -1\,,1\rangle$ Ⓒ $\langle 0\,,-14\rangle$ Ⓓ $\langle -14\,,0\rangle$

/7 ما متجه الوحده $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}=\langle 4\,,3\rangle$ ؟

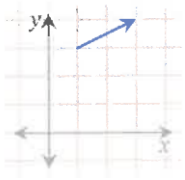
Ⓐ $\left\langle \frac{4}{5}\,,\frac{3}{5}\right\rangle$ Ⓑ $\left\langle \frac{5}{4}\,,\frac{5}{4}\right\rangle$ Ⓒ $\langle 2\,,2\rangle$ Ⓓ $\langle 4,3\rangle$

/8 المتجه: $v=5\mathbf{i}-2j$ بالصورة الإحداثية يساوي ....

Ⓐ $\langle 5\,,2\rangle$ Ⓑ $\langle 2\,,5\rangle$ Ⓒ $\langle 5\,,-2\rangle$ Ⓓ $\langle -2\,,5\rangle$

تحصيلي رياضيات

/9 أي التالي يعبر عن المتجه الممثل في الشكل ؟



Ⓐ $3\mathbf{i}+\boldsymbol{j}$ Ⓑ $-3\mathbf{i}+\boldsymbol{j}$ Ⓒ $2\mathbf{i}+\boldsymbol{j}$ Ⓓ $-2\mathbf{i}+2\boldsymbol{j}$

/10 الصورة الإحداثية لمتجه $\boldsymbol{v}$ طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي 210°

Ⓐ $\langle 7\ ,7\sqrt{3}\rangle$ Ⓑ $\langle -7\sqrt{3}\ ,-7\rangle$ Ⓒ $\langle -7\sqrt{3}\ ,7\rangle$ Ⓓ $\langle 14\ ,210\rangle$

/11 مالصورة الإحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاهه مع الأفقي 150°؟

Ⓐ $\langle -3\sqrt{3}\ ,3\rangle$ Ⓑ $\langle 3\ ,-3\sqrt{3}\rangle$ Ⓒ $\langle 3\ ,3\sqrt{3}\rangle$ Ⓓ $\langle 3\sqrt{3}\ ,-3\rangle$

/12 أي المتجهات التالية طوله $2\sqrt{2}$ وزاوية اتجاهه 150°؟

Ⓐ $\langle 2\ ,-2\rangle$ Ⓑ $\langle -2\ ,2\rangle$ Ⓒ $\mathbf{i}+\boldsymbol{j}$ Ⓓ $2\mathbf{i}+2\boldsymbol{j}$

/13 ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $B\ (6\ ,-9\ )$, $A\ (5\ ,3\ )$ ؟

Ⓐ $\langle 11\ ,-6\rangle$ Ⓑ $\langle 1\ ,-12\rangle$ Ⓒ $\langle -1\ ,12\rangle$ Ⓓ $\langle 30\ ,27\rangle$

/14 إذا كان $\mathbf{u}=\langle -1\ ,4\rangle$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\langle 4\ ,5\rangle$ ، فإن $\mathbf{v}$ يساوي .....

Ⓐ $\langle 3\ ,9\rangle$ Ⓑ $\langle 5\ ,1\rangle$ Ⓒ $\langle -5\ ,-1\rangle$ Ⓓ $\langle 3\ ,1\rangle$

/15 إذا كان $-\frac{1}{2}\mathbf{v}=\langle -4\ ,12\rangle$ فإن $\mathbf{v}$ يساوي .....

Ⓐ $\langle 2\ ,-6\rangle$ Ⓑ $\langle -2,6\rangle$ Ⓒ $\langle -8\ ,24\rangle$ Ⓓ $\langle 8\ ,-24\ \rangle$

/16 المتجه $\mathbf{V}=\langle 2\ ,3\rangle$، بدلالة متجهي الوحدة القياسيين يساوي ....

Ⓐ $2\mathbf{i}+3\boldsymbol{j}$ Ⓑ $2\mathbf{i}-3\boldsymbol{j}$ Ⓒ $5\,\mathbf{i}+\boldsymbol{j}$ Ⓓ $\mathbf{i}+\boldsymbol{j}$

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a}=\langle a_1,a_2\rangle, \mathbf{b}=\langle b_1,b_2\rangle$ كالآتي:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$$

يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي

1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين:

تحقق من فهمك : صـ 102ـ أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين :

1A) $\mathbf{u}=\langle 3,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle -5,1\rangle$

1B) $\mathbf{u}=\langle -2,-3\rangle, \mathbf{v}=\langle 9,-6\rangle$

تدرب: صـ 106ـ أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين :

1) $\mathbf{u}=\langle 3,-5\rangle, \mathbf{v}=\langle 6,2\rangle$

2) $\mathbf{u}=\langle 9,-3\rangle, \mathbf{v}=\langle 1,3\rangle$

4) $\mathbf{u}=11\mathbf{i}+7j, \mathbf{v}=7\mathbf{i}+11j$

1 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه:

تحقق من فهمك : صـ 103ـ استعمل الضرب الداخلي، لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية:

2A) $\mathbf{b}=\langle 12,16\rangle$

2B) $\mathbf{c}=\langle -1,-7\rangle$

تدرب: صـ 106ـ استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية :

7) $m = \langle -3\ ,11 \rangle$

8) $r = \langle -9\ , -4 \rangle$

3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين:

إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $a\ ,b$ فإن:

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\ |b|}$$

يكون المتجهان **متعامدان** إذا كانت الزاوية بينهما $90°$

يكون المتجهان **متوازيان** إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$

تحقق من فهمك : صـ 105ـ أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{v},\mathbf{u}$ في كل مما يأتي:

3A) $\mathbf{u} = \langle -5\ , -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4\ ,4 \rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle 9\ ,5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6\ ,7 \rangle$

تدرب: صـ 106ـ أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$ في كل مما يأتي وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة :

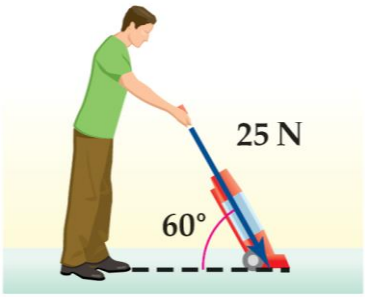
11) $\mathbf{u} = \langle 0 , -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1 , -4 \rangle$

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3j, \ \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2j$

4 حساب الشغل:

تحقق من فهمك : صـ 105ـ

4) تنظيف : يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض $60°$ ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6m ؟



تدرب: صـ 106ـ

16) فيزياء : يدفع طارق برميلا على أرض مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534N، بزاوية $25°$ ، أوجدمقدار الشغل بالجول الذي بذله طارق وقرب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.

مهارات التفكير العليا: صـ 107ـ

33) **اكتشف الخطأ** : يدرس كل من فهد وفيصل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات فقال فهد : إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية ، لأنها إبدالية ، أي أن : $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

ولكن فيصل عارضه ، فأيهما كان على صواب ؟ وضح اجابتك؟

تدرب على الاختبار: صـ 107ـ

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 1\ ,\ -1 \rangle, \langle 0,\ -9 \rangle$؟

A) 0° C) 90°

B) 45° D) 135°

46) إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6,2 \rangle$, $s = \langle 4\ ,\ -3 \rangle$، فأي مما يأتي يمثل r ، حيث $r = t - 2s$ ؟

A) $\langle 14\ ,8 \rangle$ C) $\langle -14\ ,8 \rangle$

B) $\langle 14\ ,6 \rangle$ D) $\langle -14\ ,-8 \rangle$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 إذا كان حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يساوي صفر فإن الزاوية بينهما تكون ....

Ⓐ حادة Ⓑ قائمة Ⓒ منفرجة Ⓓ مستقيمة

/2 إذا كان $C = \langle -2,7 \rangle$, $W = \langle 8,4 \rangle$, $V = \langle 2, -5 \rangle$, $u = \langle -3,6 \rangle$ ، فإن المتجهين المتعامدين هما .....

Ⓐ v, u Ⓑ v, w Ⓒ w, u Ⓓ V, c

/3 ما قيمة a التي تجعل المتجهين $v = 3i + 6j$ ، $u = ai + 2j$ متعامدين؟

Ⓐ -4 Ⓑ -3 Ⓒ 3 Ⓓ 4

/4 إذا كان المتجهان $v = \langle 3, k \rangle$ ، $u = \langle 1, -2 \rangle$ متعامدان ، فما قيمة k ؟

Ⓐ -2 Ⓑ $\frac{-3}{2}$ Ⓒ $\frac{3}{2}$ Ⓓ 2

/5 ما قياس الزاوية بين المتجهين ، $\langle 2,0 \rangle$ $\langle 3,3 \rangle$ ؟

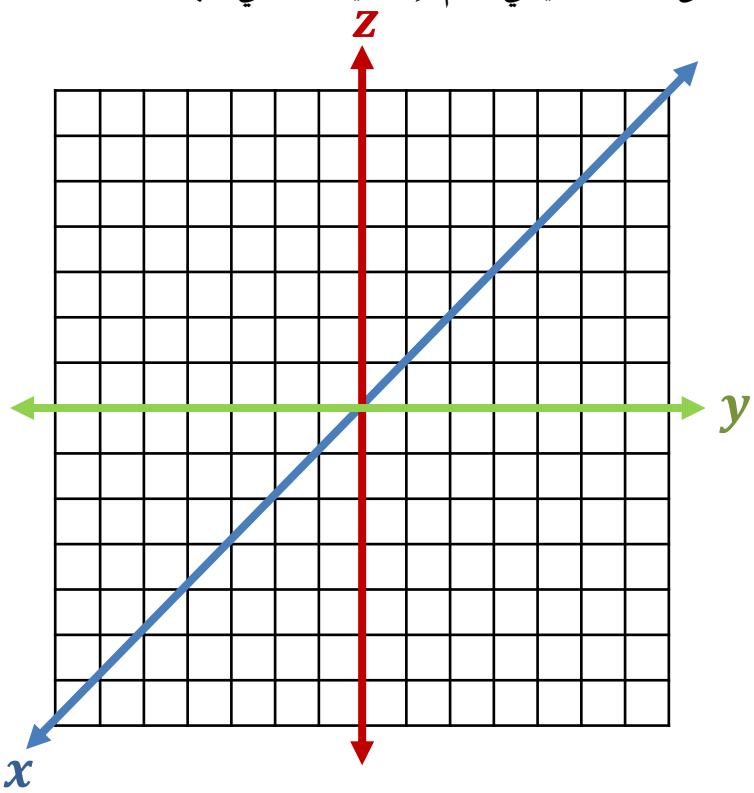
Ⓐ $30°$ Ⓑ $45°$ Ⓒ $120°$ Ⓓ $135°$

/6 إذا كان $v = \langle 0,4 \rangle$ ، $u = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$ فما قياس الزاوية بين المتجهين u, v ؟

Ⓐ $30°$ Ⓑ $60°$ Ⓒ $120°$ Ⓓ $240°$

1 تعيين نقطة في الفضاء

تحقق من فهمك : صـ 109ـ عين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

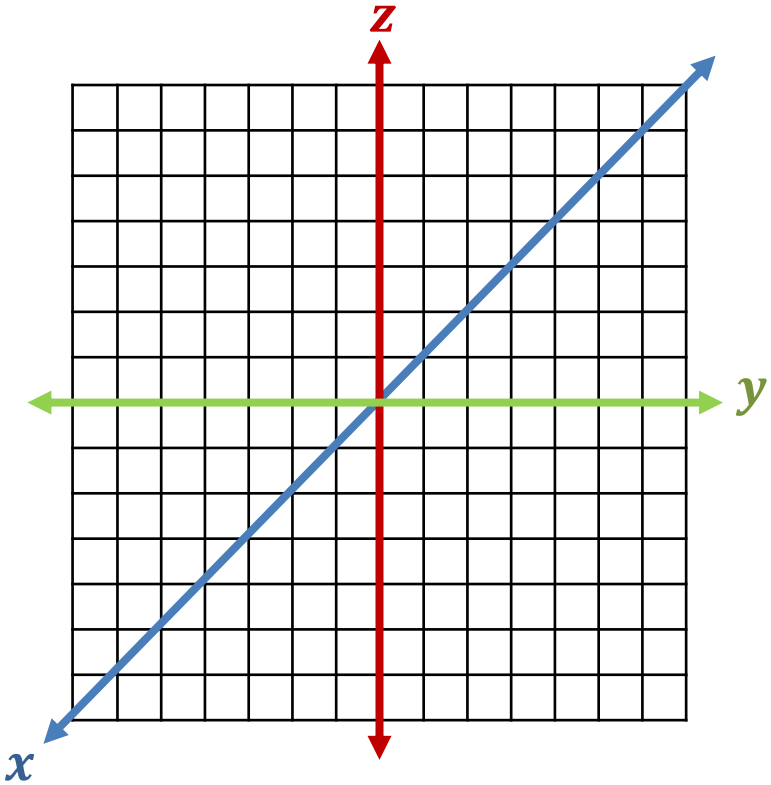


(1A $(-3, -4, 2)$

(1B $(3, 2, -3)$

(1C $(5, -4, -1)$

تدرب: صـ 113ـ عين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:



(1 $(1, -2, -4)$

(2 $(3, 2, 1)$

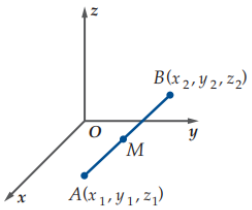
(3 $(-5, -4, -2)$

2 المسافة بين نقطتين و نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

المسافة بين النقطتين: $A=(x_1,y_1,z_1), B=(x_2,y_2,z_2)$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$: $M=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$



تحقق من فهمك : صـ 110ـ

2) طائرات : تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن $0.5mi$ في أثناء طيرانها ، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق ، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين : $(28000, -250, 450)$, $(30000, 150, 300)$, مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام ، فأجب عما يأتي :

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة ؟

.....

.....

.....

B) إذا أطلقت ألعاب نارية ، و أنفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين ، فما إحداثيات نقطة الإنفجار؟

.....

.....

.....

تدرب: صـ 113ـ

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها ،
ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يلي:

7) $(1,0,9),(-4,10,4)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8) $(-9,-2,-2),(-6,6,3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 تعيين متجه في الفضاء

إذا كان **v** متجها في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1 , v_2 , v_3) نقطة نهايته فإننا نعبر عنه بالصورة الإحداثية :

$$\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$$

المتجه الصفري

$$0 = \langle 0 , 0 , 0 \rangle$$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية

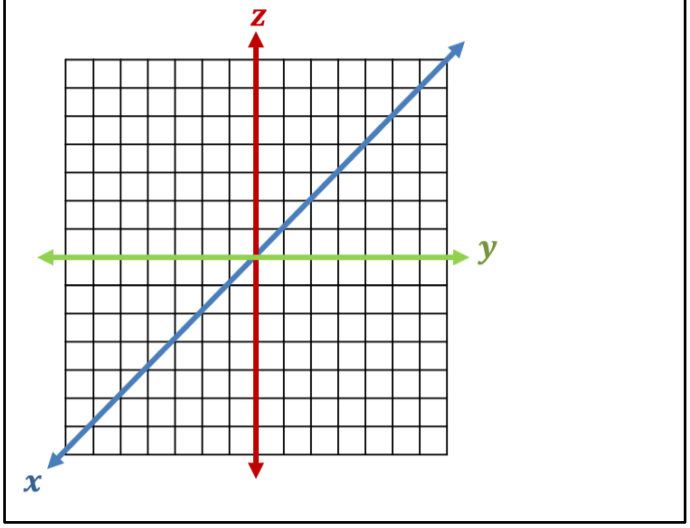
$$\mathbf{i} = \langle 1 , 0 , 0 \rangle$$
$$j = \langle 0 , 1 , 0 \rangle$$
$$k = \langle 0 , 0 , 1 \rangle$$

يمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه **v** على صورة تو افق خطي لمتجهات الوحدة i , j k كما يأتي

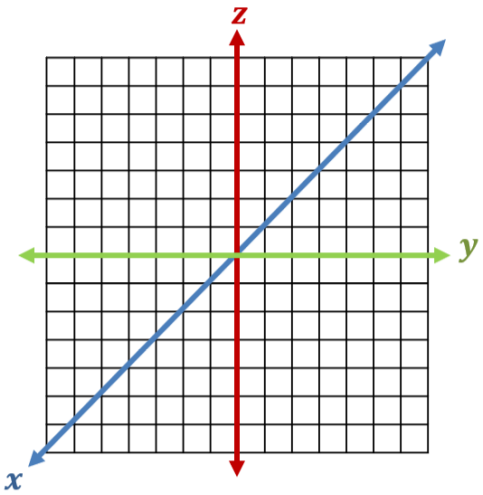
$$\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 j + v_3 k$$

تحقق من فهمك : صـ 111ـ مثل بيانيا كلا من المتجهين الآتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

(3A $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

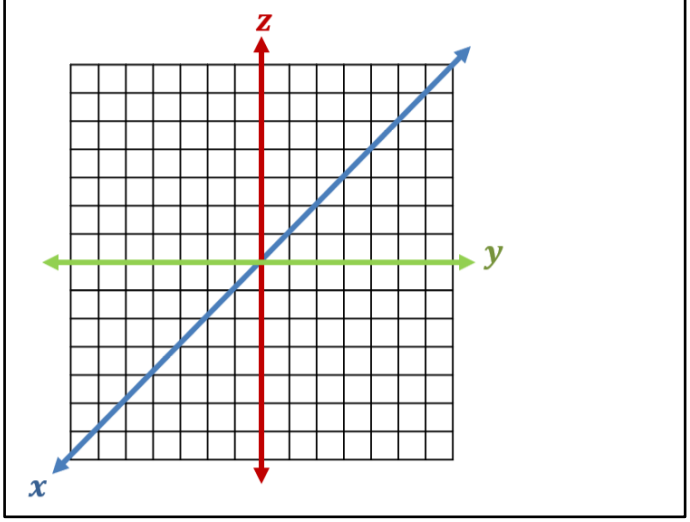


(3B $w = -1\mathbf{i} - 3j + 4k$

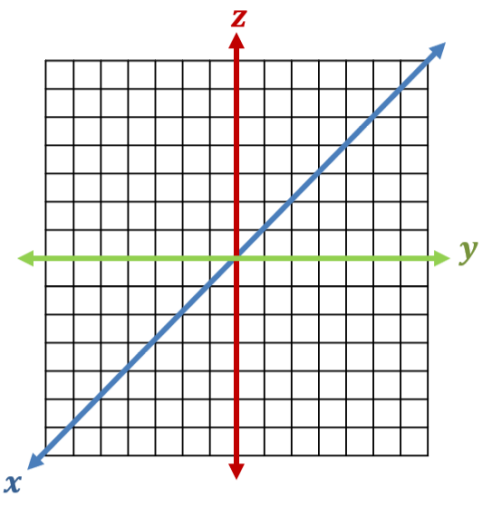


تدرب: صـ 113ـ

(13 $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle$



(17 $w = -10\,\mathbf{i} + 5k$



4 العمليات على المتجهات في الفضاء

تحقق من فهمك : صـ 112ـ

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات $y = \langle 3, -6, 2 \rangle, w = \langle -1, 4, -4 \rangle, z = \langle -2, 0, 5 \rangle$

(4A $4w - 8z$

(4B $3y + 3z - 6w$

تدرب: صـ 113ـ

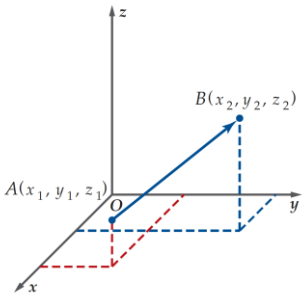
أوجد كلا مما يأتي للمتجهات: $b = \langle 6, -2, -7 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle, a = \langle -5, -4, 3 \rangle$

(21 $7a - 5b$

(22 $2a + 5b - 9c$

5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريا

الصورة الاحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A\ (x_1,y_1,z_1)$ ، ونقطة نهايته $B\ (x_2\ ,y_2,z_2)$ هي : $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1\ ,y_2 - y_1,z_2 - z_1\rangle$



إذا كان $\overrightarrow{AB}$ متجها نقطة بدايته (x_1,y_1,z_1) ، ونقطة نهايته $(x_2\ ,y_2,z_2)$ ،فإن **طول** $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)}$$

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle a_1\ ,a_2\ ,a_3\rangle$ فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ويكون **متجه الوحدة** u باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

تحقق من فهمك : صـ 112ـ

أوجد الصورة الإحداثية ، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاه نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كل مما يأتي:

(5A) $\mathbf{A\ (-2\ ,-5,-5),\ B\ (-1,4,-2)}$

(5B) $\mathbf{A\ (-1\ ,4\ \ ,6),\ B\ (3\ ,3\ ,8)}$

تدرب: صـ 113ــ

أوجد الصورة الإحداثية ، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاه نقطتا بدايته ونهايته ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كل مما يأتي:

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

مهارات التفكير العليا: صـ 114ــ

53) **تحد** : إذا كانت M هي نقطة منصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين : $M_1(-1,2, -5), M_2(3,8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة الميتقيمة M_1M.

تدرب على الاختبار: صـ 114ــ

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط :$A(0, 3\ 5), B(1, 0, 2), C(0, -3,5)$ ؟

A) قائم الزاوية

B) متطابق الضلعين

C) متطابق الأضلاع

D) مختلف الأضلاع

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 أي التالي يمثل $\overrightarrow{AB}$ إذا كان : $A(3,4,-4)$, $B(-5,2,1)$ ؟

Ⓐ $\langle -8,-2,5\rangle$ Ⓑ $\langle 8,-2,3\rangle$ Ⓒ $\langle 8,2,-3\rangle$ Ⓓ $\langle -8,-2,-3\rangle$

/2 إذا كان : $A(-5,0,2)$, $B(3,6,2)$ فإن متجه الوحدة الذي له اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو ....

Ⓐ $\left\langle \frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right\rangle$ Ⓑ $\left\langle 2,\frac{3}{2},0\right\rangle$ Ⓒ $\langle -1,3,2\rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{-4}{5},\frac{-3}{5},0\right\rangle$

/3 إذا كان $a=\langle 2,4,-3\rangle, b=\langle -5,-7,1\rangle$ فإن : $2a-b$ تساوي .....

Ⓐ $\langle -1,1,5\rangle$ Ⓑ $\langle 4,8,-6\rangle$ Ⓒ $\langle 9,15,-7\rangle$ Ⓓ $\langle 9,15,-5\rangle$

/4 طول المتجه $w=5i+3j-\sqrt{2}k$ يساوي ....

Ⓐ $8-\sqrt{2}$ Ⓑ 6 Ⓒ $8+\sqrt{2}$ Ⓓ $4\sqrt{2}$

/5 متجه الوحدة في اتجاه المتجه $v=\langle 2,-3,6\rangle$ يساوي....

Ⓐ $\langle 1,1,1\rangle$ Ⓑ $\left\langle \frac{2\sqrt{31}}{31},\frac{3\sqrt{31}}{31},\frac{6\sqrt{31}}{31}\right\rangle$ Ⓒ $\left\langle \frac{2}{7},\frac{-3}{7},\frac{6}{7}\right\rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{1}{2},\frac{-1}{3},\frac{1}{6}\right\rangle$

/6 إذا كانت $(3,0,6)$ نقطة المنتصف بين النقطتين: $A(2,3,4), B(4,-3,k)$ فإن k تساوي .....

Ⓐ 2 Ⓑ 6 Ⓒ 8 Ⓓ 12

الموضوع: 5-5 : الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء التاريخ: / / 144هـ

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين
$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$
في الفضاء كالآتي:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

يكون المتجهان غير الصفريين
$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين
إذا وفقط إذا كان:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

1 إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

تحقق من فهمك : صـ 115ـ

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$ ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

تدرب: صـ 118ـ

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

2 الزاوية بين متجهين في الفضاء

إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين في الفضاء $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ فإن: $\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$

تحقق من فهمك : صـ 115ـ

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلة عشرية :

تدرب: صـ 118ـ

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$، في كل مما يأتي
وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة

8) $\mathbf{u} = \langle 6\ ,\ -5,1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8\ ,\ -9,5\rangle$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

3 إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين :

إذا كان $\mathbf{a} = \mathbf{a_1 i} + \mathbf{a_2 j} + \mathbf{a_3 k},\ \mathbf{b} = \mathbf{b_1 i} + \mathbf{b_2 j} + \boldsymbol{b_3 k}$ فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}\ ,\mathbf{b}$ هو المتجه

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\mathbf{a_2\, b_3} - \mathbf{a_3\, b_2})\mathbf{i} - (\mathbf{a_1\, b_3} - \mathbf{a_3\, b_1})\mathbf{j} + (\mathbf{a_1\, b_2} - \mathbf{a_2\, b_1})\mathbf{k}$$

الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}\ ,\mathbf{b}$ هو متجه وليس عدد

تحقق من فهمك : صـ 116ـ

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$، في كل مما يأتي، ثم بين أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلا من $\mathbf{u},\mathbf{v}$

3A) $\mathbf{u} = \langle 4\ ,2,\ -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 5\ ,1,4\rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle -2\ ,\ -1,\ -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5\ ,1,4\rangle$

تدرب: صـ 118ـ

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$، في كل مما يأتي، ثم بين أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلا من $\mathbf{u},\mathbf{v}$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\,, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

4 مساحة متوازي أضلاع في الفضاء:

لإيجاد مساحة متوازي أضلاع في الفضاء :

- ✓ نوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- ✓ نوجد طول $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

تحقق من فهمك : صـ 117ـ

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه : $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\,, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران ،

تدرب: صـ 118ـ أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u},\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران ،

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3 \rangle$

الضرب القياسي الثلاثي :

إذا كان:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t_1 i} + \mathbf{t_2 j} + \mathbf{t_3 k} \ , \ \mathbf{u} = \mathbf{u_1 i} + \mathbf{u_2 j} + u_3 k, \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 k$$

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{v}$ يعرف كالآتي :

$$\mathrm{t} \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

5 حجم متوازي السطوح:

تحقق من فهمك : صـ 117ـ

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه : $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

تدرب: صـ 250ـ

20) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه : $\mathbf{v} = \langle 3 , -2 , 6 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle 4 , -7 , -5 \rangle$, $\mathbf{t} = \langle -1 , -9 , 2 \rangle$ أحرف متجاورة.

مهارات التفكير العليا: صـ 119ـ

43) **تحد**: إذا كان $\mathbf{u} = \langle 4, 6, C \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -2, 5 \rangle$ فأوجد قيمة C التي تجعل $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

تدرب على الاختبار: صـ 119ـ

54) أي مما يأتي متجهان متعامدان ؟

A) $\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle$

B) $\langle 1, -2, 3 \rangle, \langle 2, -4, 6 \rangle$

C) $\langle 3, 4, 6 \rangle, \langle 6, 4, 3 \rangle$

D) $\langle 3, -5, 4 \rangle, \langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$ ؟

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين : $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$؟

A) $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B) $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C) $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D) $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

/1 إذا كان : $v = \langle -2 , -1 , 3 \rangle , \mathbf{u} = \langle b , -3 , 1 \rangle$ فما قيمة b التي تجعل المتجهين u,v متعامدين ؟

Ⓐ -6 Ⓑ -3 Ⓒ 3 Ⓓ 6

/2 أوجد : $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Ⓐ $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ Ⓑ $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ Ⓒ $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ Ⓓ $-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

/3 إذا كان : $v = \langle 2 , 0 , -1 \rangle , \mathbf{u} = \langle 1 , -2 , 0 \rangle$ متجهين فإن $u \times v$ يساوي .....

Ⓐ $\langle -1, -1 , 2 \rangle$ Ⓑ $\langle 1, 1 , -2 \rangle$ Ⓒ $\langle -1, 1 , 2 \rangle$ Ⓓ $\langle 1, -1 , -2 \rangle$

/4 متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة؟

Ⓐ 13 Ⓑ 21 Ⓒ $\sqrt{186}$ Ⓓ $\sqrt{458}$

/5 قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{a} = \langle \sqrt{2},2,0 \rangle , \mathbf{b} = \langle \sqrt{3},0 , 1 \rangle$ يساوي .....

Ⓐ $30°$ Ⓑ $45°$ Ⓒ $60°$ Ⓓ $90°$

/6 أي المتجهات التالية عمودي على المتجهين : $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Ⓐ $\langle -3, 2, 6 \rangle$ Ⓑ $\langle -3, 6, -6 \rangle$ Ⓒ $\langle 3, -2, 6 \rangle$ Ⓓ $\langle -3, -6, 6 \rangle$

انتهى الفصل الدراسي الثاني